ES1

Serie documentos para capacitación semipresencial
Educación Secundaria 1º año (7º ESB)

Introducción al Diseño Curricular

Matemática

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires
Dirección General de Cultura y Educación

Serie documentos para capacitación semipresencial
Educación Secundaria 1º año (7º ESB)

Introducción al Diseño Curricular

Matemática

Índice

Matemática

Especialistas
Graciela Bellome
Ana Lía Crippa (coordinadora)
Andrea Novembre
Beatriz Ressia de Moreno
María de los Angeles Zuvialde

Programa de capacitación para Secundaria Básica
Coordinadoras
Lic. Alejandra Paz
Lic. Claudia Venturino

Asesora pedagógica en educación a distancia
María Liliana Cedrato

Colaboradores
Fabiana Smaha, Karim Wiedemer, María Cecilia Corinaldesi y Máximo Calabrese.

Edición y diseño: Dirección de Producción de Contenidos
dir_contenidos@ed.gba.gov.ar

Octubre de 2006

Carta de presentación

La Plata, 13 de septiembre de 2006

Estimados directores y docentes de primer año
de Educación Secundaria Básica:

En 2005, la provincia de Buenos Aires inició un proceso de transformación y creó una nueva escuela secundaria de seis años cuyo Primer Ciclo, la Educación Secundaria Básica, se constituye en un espacio privilegiado para la educación de las y los adolescentes bonaerenses.

En función de avanzar en la construcción de la Educación Secundaria se ha elaborado una propuesta de enseñanza que se plasma en el nuevo Diseño Curricular con el propósito de posibilitar a los jóvenes construir proyectos de futuro y acceder al acervo cultural de la humanidad.

La complejidad de la tarea docente, la actualización disciplinar y didáctica y los cambios curriculares requieren de una formación docente continua que permita la revisión crítica de la propia práctica. Por ello, la propuesta de capacitación que se inicia constituye un primer acercamiento al Diseño Curricular de la nueva Educación Secundaria con el propósito de acompañar a los docentes en los procesos de cambio que se impulsan y de ofrecerles herramientas que incidan en los procesos de enseñanza y en la implementación de la prescripción curricular.

Por todo ello, este módulo constituye un espacio de diálogo e intercambio en relación con la práctica del docente y los posicionamientos teórico prácticos sobre la base de los cuales se deberían ir constituyendo los acuerdos para que el nuevo Diseño Curricular se constituya en una herramienta de la planificación de la enseñanza.

En este sentido, la propuesta de trabajo no agota –ni en profundidad ni en extensión– los ejes de contenido seleccionados, aunque intenta *abrir puertas* hacia un saber compartido acerca de la propuesta curricular vigente para construir juntos la escuela que todos queremos.

Los despedimos animándolos a participar de esta capacitación con el mismo compromiso con el que día a día enfrentan el desafío de la enseñanza.

Dirección de Capacitación

Introducción

Esta propuesta de capacitación a distancia (semipresencial) esta destinada a los Profesores a cargo del Espacio Curricular de Matemática y constituye un primer acercamiento al nuevo Diseño Curricular para la Escuela Secundaria (ES).

Hemos diseñado una propuesta de capacitación que se propone construir espacios de reflexión; el diseño y evaluación de proyectos de enseñanza situados y coherentes con las orientaciones propuestas en el Diseño Curricular.

Objetivos del curso

La nueva organización de la Educación Secundaria del Sistema Educativo Provincial requiere de acciones de capacitación que acompañen a los docentes en la profundización del enfoque que orienta la elaboración del Marco General de la Educación Secundaria y su incidencia en la implementación del Diseño Curricular de Matemática en 1º año.

En esta materia se ha optado por centrar el trabajo en la Geometría y las Magnitudes. La elección obedece, fundamentalmente, a lo relevado a partir de las consultas realizadas por esta Dirección. De las mismas se desprende la necesidad de instalar un trabajo de producción matemática que propicie en los alumnos la descontextualización y las generalizaciones, acercándolos a los saberes de esta ciencia, aspecto que se privilegia en el mencionado Diseño. Por otra parte, dichos relevamientos dan cuenta que los docentes reconocen algunas dificultades para abordar la Geometría y las Magnitudes en las aulas. Esta preocupación está abalada por numerosos trabajos didácticos que dan cuenta del predominio de prácticas de enseñanza centradas en el "mostrar" los objetos del campo temático seleccionado, considerando que el objeto de estudio es el dibujo, es decir, confundiendo el objeto matemático con su representación.

Por todo lo dicho anteriormente es que con este curso nos proponemos dilucidar junto a ustedes qué implica el trabajo matemático desde este enfoque, cuáles son las particularidades que adquiere dicho trabajo en el eje Geometría y Magnitudes, cómo se vincula con otras ramas de la matemática, con otras ciencias, y qué nos aportan estas relaciones. Para ello, con diferente grado de generalidad, y especialmente centrados en él nos planteamos que los docentes que participan de este proyecto puedan:

- Profundizar sus conocimientos acerca del Marco General para la Educación Secundaria en la Provincia de Buenos Aires y del Diseño Curricular para la Educación Secundaria Básica.
- Revisar y actualizar contenidos disciplinares y didácticos desde el enfoque adoptado en los mencionados documentos curriculares.
- Identificar problemas relevantes de la enseñanza y del aprendizaje de la Matemática durante el 1º año de la ESB, a fin de abordar su tratamiento desde marcos teóricos específicos.
- Analizar y diseñar propuestas de enseñanza y de evaluación fundamentadas desde los supuestos teóricos que se sustentan en dichos documentos, que contemplen las características de la institución en que se llevarán a cabo.
- Identificar estrategias para que los alumnos tengan control sobre las propias producciones y pongan en juego diferentes formas de validación del trabajo realizado.
- Detectar variables sobre las que pueda accionar el docente para mejorar las relaciones propias y de sus alumnos con los contenidos en cuestión, acercándose a la demostración deductiva, como modo de validación de las afirmaciones matemáticas.

Contenidos

Unidad 1. La Enseñanza de la Matemática en primer año y su vinculación con los propósitos de la Escuela Secundaria

La propuesta de enseñanza para la Educación Secundaria. Sus propósitos y organización. Su concreción en la enseñanza de Matemática, en especial en el primer año de la Educación Secundaria (ES). La enseñanza de la Matemática en la actualidad. Propósitos generales de la Matemática en la ES. Análisis de las expectativas de logro propuestas por el DC. Explicitación de criterios para la organización y secuenciación de contenidos. Análisis de las orientaciones didácticas propuestas por el D.C. El papel de la evaluación en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Unidad 2. La incidencia de la gestión de clase y de la secuenciación de actividades en los aprendizajes matemáticos

Las organizaciones grupales posibles y su importancia en los aprendizajes matemáticos: ejemplos referidos a la Geometría y a las Magnitudes. La gestión del docente y las interacciones en la clase: interacciones entre los alumnos y los problemas, entre los alumnos entre sí, entre los alumnos con el docente. Secuenciación de actividades. Criterios de secuenciación.

Unidad 3. La evaluación de los aprendizajes matemáticos

Evaluación y Didáctica de la Matemática: interrelaciones. Evaluación y contrato didáctico. Algunos instrumentos de evaluación. Criterios de evaluación. Programas de evaluación. Evaluación y acreditación.

Hacia una evaluación formativa: el trabajo con errores persistentes de los alumnos en el aprendizaje de la Geometría y de las Magnitudes. Devolución y remediación de errores significativos.

Modalidad de trabajo

- La unidad 1 se trabajará durante el primer período no presencial y el primer encuentro presencial.
- Las unidades 2 y 3 se trabajarán durante el segundo período no presencial y el segundo encuentro presencial.
- Durante el tercer período no presencial Ud. deberá retomar todas las unidades.

Para el desarrollo de este curso se ha adoptado la **modalidad a distancia (semipresencial),** esto implica que usted participará de una propuesta de capacitación que alterna instancias de trabajo no presencial o autónomo (23 horas reloj) con encuentros presenciales (9 horas reloj) diseñados secuenciadamente para lograr los objetivos explicitados. Este material impreso irá pautando ambas instancias ya que fue pensado para guiar, orientar y acompañar su proceso de aprendizaje

A continuación le presentamos la secuencia en la que hemos diseñado el trabajo

Modalidad	Característica	Actividades a realizar	Fecha y horario
Trabajo no presencial o autónomo	Trabajo individual y/o grupal de lectura, análisis y vinculación de los distintos contenidos de la primera unidad del Módulo, los Anexos correspondientes, el marco general para la ESB y el Diseño Curricular. El espacio y los tiempos los organizan los cursantes	Se analizará el siguiente material de lectura: • Unidad 1 del Módulo a distancia • Marco General • Diseño Curricular de Matemática para 7º de ESB. • Anexos 1, 2, 3, 4 y 5. Para ello se propone la realización de todas las actividades propuestas en la Unidad 1.	
Primer encuentro presencial	1. Exposición: presentación de los marcos teóricos. 2. Discusión y corrección de las actividades seleccionadas para discutir en el encuentro presencial. 3. Atención a las consultas y demandas de los capacitandos.	1. Debate referido a la exposición teórica 2. Revisión de las actividades 1, 2, 6, 7, 8, 9 y 10 de la Unidad 1. 3. Aclaración de dudas que hayan surgido	Tres horas de duración
Trabajo no presencial o autónomo	Trabajo individual y/o grupal de lectura, análisis de las unidades 1 y 2 y de vinculación entre las cuestiones abordadas en ellas. Análisis y elaboración y/o reelaboración de propuestas de clases, de secuencias de actividades y de instancias de evaluación y de remediación. El espacio y los tiempos los organizan los cursantes	Se analizará el siguiente material de lectura: • Unidades 1 y 2 del Módulo a distancia • Marco General • Diseño Curricular de Matemática para 7º de ESB. • Anexos 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11. Para ello, se propone la realización de la totalidad de las actividades propuestas en la Unidades 1 y 2.	
Segundo encuentro presencial	1. Exposición: presentación de los marcos teóricos. 2. Discusión y corrección de las actividades seleccionadas para discutir en el encuentro presencial. 3. Atención a las consultas y demandas de los capacitandos.	1. Debate referido a la exposición teórica 2. Revisión de las actividades 1, 3 y 4 de la Unidad 1 y de las actividades 1, 3 y 7 de la Unidad 2. 3. Aclaración de dudas que hayan surgido.	Tres horas de duración
Trabajo no presencial o autónomo	Análisis de una propuesta de enseñanza y elaboración de la propuesta de evaluación correspondiente.	Revisión de lo realizado hasta el momento y evaluación no presencial.	
Tercer encuentro presencial	Reflexión teórica acerca de la propuesta de enseñanza y de evaluación.	Evaluación presencial	Tres horas de duración

Recuerde que este material constituye una propuesta de enseñanza elaborada para lograr los objetivos explicitados y fue organizado en unidades didácticas que incluyen contenidos y actividades que orientarán el análisis del diseño curricular de la ES.
Para las instancias no presenciales o autónomas le sugerimos que:

- Organice su tiempo de lectura y trabajo.
- Cuando reciba el material realice una lectura rápida del módulo para tener una percepción global de los contenidos abordados.
- No postergue la realización de las actividades propuestas; cada una fue pensada desde una secuencia didáctica tendiente a facilitar el proceso de auto capacitación.
- Destaque los conceptos que identifique en cada lectura.
- Registre los comentarios, cuestionamientos y/o preguntas que le vayan surgiendo a fin de articular el marco teórico con su experiencia profesional.
- Anote las certezas, interrogantes o dudas que se le presenten para poder trabajarlas en los encuentros presénciales.
- Durante la lectura no deje de plantearse qué está entendiendo.
- Al cerrar cada actividad permítase reflexionar sobre lo leído y propóngase relacionar lo nuevo con lo conocido.

En cada unidad encontrará:

a) **Breves referencias sobre los contenidos de Matemática** que se abordan en la unidad, que le facilitarán la lectura del Diseño Curricular.

b) **Actividades elaboradas para:**

- favorecer y orientar el aprendizaje de los conceptos e ideas desarrolladas en el Marco General del Diseño Curricular y en el capítulo referido a la enseñanza de Matemática (primer año)
- vincular su práctica docente con los conceptos y concepciones analizados.

En las actividades que Ud debe resolver se indica si se trata de:

- Actividades para revisar durante los encuentros presenciales,
- Actividades de autocorrección
- Actividades que constituyen los ítems de las evaluaciones de proceso.

Al final de cada módulo se incluyen una serie de **anexos** con diferentes características que complementan y enriquecen los contenidos del Diseño Curricular y las actividades propuestas- Recuerde que si lo necesita puede recurrir a la biblioteca del CIE.

Los **encuentros presenciales** (ver la secuencia de trabajo) son instancias de trabajo grupal diseñadas para el intercambio y la comunicación entre los docentes participantes y el docente a cargo de la capacitación. En este espacio podrá intercambiar ideas, plantear y resolver las dudas surgidas del estudio individual, construir grupos de estudio para analizar los contenidos y discutir las distintas formas de resolución de las actividades de aprendizaje. Estos encuentros constituyen espacios para desarrollar contenidos no incluidos en este material impreso pero que necesitan que cada cursante haya realizado las actividades y lecturas propuestas en las instancias de trabajo autónomo, previas al encuentro ya que son los cursantes -con sus inquietudes, preguntas, comentarios- los que irán enriqueciendo el encuentro junto con el docente otorgándole así una dinámica particular. En este material impreso se detalla la actividad o actividades que deberá llevar a cada encuentro presencial.

Es aconsejable que los grupos de estudio funcionen también en los momentos de trabajo autónomo para intercambiar experiencias, trabajar cooperativamente y relacionarse con otros cursantes que enriquecerán su aprendizaje y su desempeño laboral en el aula y en su institución.

El CIE será el encargado de atender las cuestiones operativas de la implementación del curso con el que podrá comunicarse cuando necesite información respecto de las fechas y horarios de los encuentros presenciales, las fechas de entrega de trabajos, cuestiones relativas a los materiales de estudio, etc.

Evaluación y acreditación

Se proponen las siguientes instancias de evaluación:

- Dos instancias de evaluaciones de proceso, que consisten en la resolución de los ítems del Módulo propuestos para este fin.
- Una instancia de acreditación que incluya:
  - Una actividad no presencial, individual y escrita;
  - Una actividad presencial, individual y escrita.

Esta última instancia consistirá en la realización del análisis didáctico de una secuencia de actividades especialmente seleccionada, la elaboración de un instrumento de evaluación y sus correspondientes criterios, la propuesta de una instancia de devolución (no presencial) y la fundamentación teórica sobre la base de la bibliografía abordada en el curso (presencial). Recuerde que a la instancia presencial debe concurrir con el módulo y con los materiales que considere necesarios.

Se tendrán en cuenta los siguientes criterios de corrección:

- La articulación entre la secuencia presentada por el capacitador y los conocimientos disponibles identificados por el docente.

- La pertinencia en la propuesta de la organización de las clases.
- La capacidad para anticipar procedimientos adecuados de los alumnos.
- La capacidad para anticipar errores relevantes de los alumnos.
- La capacidad para anticipar intervenciones docentes pertinentes.
- La pertinencia de la evaluación, de los criterios y de las instancias de remediación propuestas.
- La exhaustividad y pertinencia de los elementos teóricos incluidos.

Para acreditar el Curso es necesario que el docente participante:

- cumpla con la totalidad de las asistencias a las tutorías.
- participe activamente en los intercambios propuestos.
- entregue en tiempo y forma los ítems que integran las evaluaciones de proceso.
- aprueba la instancia de acreditación (se prevé un recuperatorio).

Unidad 1.

La enseñanza de la Matemática en primer año y su vinculación con los propósitos de la escuela secundaria

Contenidos

La propuesta de enseñanza para la Educación Secundaria. Sus propósitos y organización. Su concreción en la enseñanza de Matemática, en especial en el primer año de la Educación Secundaria (ES). La enseñanza de la Matemática en la actualidad. Propósitos generales de la Matemática en la ES. Análisis de las expectativas de logro propuestas por el DC. Explicitación de criterios para la organización y secuenciación de contenidos. Análisis de las orientaciones didácticas propuestas por el D.C. El papel de la evaluación en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Características de la Educación Secundaria

Para caracterizar la Educación Secundaria y comprender sus propósitos le solicitamos que lea el “Marco general para la Educación Secundaria” y luego realice una segunda lectura orientándose por las consignas que incluimos a continuación. La producción que usted elabore será tratada en el primer encuentro presencial.

ACTIVIDAD 1

(para revisar en el encuentro presencial)

- Relacione la secuencia histórica que allí se explicita con su biografía escolar y profesional.
- Puntualice la organización de la Enseñanza Secundaria en la Provincia de Buenos Aires.
- Explique los propósitos planteados para la Educación Secundaria y analice su importancia en relación con la demanda de la sociedad en el momento actual.
- En el título "Fundamentos de la propuesta para la educación Secundaria" se explicitan las concepciones que definen la propuesta. Lea y analice el texto y luego explique las siguientes expresiones que dan cuenta de algunos principios que sustentan la propuesta curricular para la Educación Secundaria en la Provincia de Buenos Aires.

  - Implicancias del curriculum.
  - Niños, adolescentes y jóvenes como sujetos de derecho y como sujetos sociales.
  - Ciudadanía dentro y fuera de la escuela.
  - La experiencia educativa se desarrolla en la diversidad, la desigualdad y la diferencia.
  - La escuela constituye un lugar de encuentro intercultural.
  - La escuela es una institución de relaciones intergeneracionales.
  - Los y las docentes asumen la tarea de enseñar como un acto intencional, como decisión política y fundamentalmente ética.
  - La escuela sólo le exige al joven su ubicación de alumno y no como joven o adolescente-
  - Es necesario que la escuela avance en la construcción de la relación entre lenguaje y conocimiento.

  - Cuando el lenguaje de la escuela no se entiende marca un adentro y un afuera.
  - Existen diferencias en lo que implicó la escolaridad obligatoria para la generación del '80 y lo que implica en la actualidad.
  - Caracterice los "principales criterios técnicos" que se detallan. Explicite los motivos y las decisiones que justifican estos criterios.

En esta primera aproximación al material usted habrá podido detectar que allí se plantea fundamentalmente la continuidad de los estudios de los ciudadanos, su formación como sujetos de conocimiento activos y participativos integrados a la sociedad y señala la importancia de la ES para orientar y facilitar el ingreso de sus jóvenes al mundo del trabajo. Todas estas expectativas están relacionadas con una concepción de sujeto, que fue modificándose a lo largo de la historia, y en la actualidad no puede concebirse separada del conocimiento. Por otro lado esto conlleva a pensarlo dentro de las escuelas donde coexisten diferentes culturas y edades.

La enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria

Matemática, hacer matemática y enseñar matemática: primeras reflexiones

Seguramente, en infinidad de oportunidades, hemos escuchado frases como las siguientes:

"No, la matemática no es para mí"

"Salió a mí, nunca va a entender matemática"

Parecen transmitir que aprender matemática estuviese reservado a algunos "privilegiados", ya sea por pertenecer a una determinada clase social o por haber heredado esa capacidad.

A fin de reflexionar sobre estas cuestiones le proponemos realizar la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 2

(para revisar en el encuentro presencial

a) Comente a qué se puede atribuir las frases citadas más arriba.

b) Lea el apartado titulado **La enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria Básica** del Diseño Curricular de Matemática para 7º y, a la luz del mismo, analice su respuesta al **ítem a.**

Recuerde registrar sus respuestas, sus dudas y sus inquietudes.

En síntesis, queremos resaltar que desde la concepción de matemática como producto cultural, se considera que si la matemática es algo que hizo el hombre, todos los alumnos pueden acceder a la forma de pensar y producir de esta disciplina, trabajando del modo que se trabaja en el interior de la misma. Luego, para **aprender matemática** es necesario **"hacerla".** Esa forma particular de hacer y de pensar es lo que permitirá, en forma análoga a lo que sucede en el mundo matemático, que los alumnos otorguen sentido a los conocimientos en cuestión, lo cual depende de las decisiones didácticas que se adopten.

ACTIVIDAD 3

(ítem correspondiente a la evaluación de proceso)

Lea los materiales que se incluyen en los Anexos 1 y 2 y profundice los análisis que realizó en la Actividad 2.

Centrado en ese "modo de hacer matemática" que intentamos propiciar, una vez que los alumnos hayan resuelto el problema (en forma grupal o individual), se plantea la necesidad de obtener información acerca de la **validez** de lo producido. A esta información los alumnos pueden acceder de dos maneras diferentes:

- **Por medio de la información directa aportada por el docente**

- **Buscando por sí mismos las razones que permiten decidir la validez de lo producido.**

Le solicitamos resolver esta actividad antes de continuar con la lectura del módulo

ACTIVIDAD 4

(autocorrección)
Encuentre por lo menos dos frases del Diseño Curricular que pueda vincular con las siguientes:

"La apelación a un criterio externo – como la autoridad del docente – impide que se avance en la comprensión de las razones por las cuales un conocimiento funciona de determinada manera".

"El problema muere tanto para los que lo resuelven correctamente como para los que cometen errores. No hay ninguna exigencia por parte de la situación misma que lleve a un trabajo reflexivo sobre la solución" (Sessa C. y Kulesz, L. (2002).

Ud. coincidirá en que los alumnos podrán avanzar en el grado de certeza respecto de lo producido durante la resolución responsabilizándose matemáticamente de sus respuestas. Esto provoca en el aula una diferencia fundamental desde la perspectiva del conocimiento que se va construyendo: en las clases en las que el docente valida las producciones de los alumnos, el problema se cierra, no dando lugar a una verdadera actividad matemática del alumno.

Sobre los desarrollos que incluimos en este apartado volveremos a lo largo del presente módulo.

La enseñanza de la Geometría: una mirada desde Diseño Curricular de Matemática

A fin de reflexionar sobre algunas maneras de considerar enseñanza de la Geometría, y establecer diferencias entre ellas, le proponemos la siguiente actividad para que resuelva antes de continuar con la lectura del módulo.

ACTIVIDAD 5

(autocorrección)

Formule tres o cuatro preguntas que usualmente plantean los docentes a sus alumnos durante una clase de Geometría. Anote sus respuestas para volver sobre ellas a lo largo de este curso.

Es muy probable que haya incluido preguntas como las siguientes:

- ¿Qué ven en el dibujo?
- ¿Qué características observan en estas figuras?
- Cuenten la cantidad de lados en las figuras y encierren abajo el número que corresponda
- Midan las diagonales de los cuadriláteros de la figura. ¿Qué observan? ¿Qué conclusión pueden obtener?

Las dos primeras preguntas suponen que el alumno puede "ver" en la figura lo mismo que el docente "ve" o lo que el docente quiere que vea. Pero lo que cada uno de ellos "ve" está totalmente condicionado por los conocimientos disponibles que hacen posible "ver". Y aquí aparece la primera dificultad cuando los alumnos dicen por ejemplo, respecto a la segunda pregunta, que todos los triángulos están dibujados sobre el renglón, o que los triángulos están dibujados con colores distintos. Es algo que ellos ven, pero no lo que el docente espera. Es muy difícil hallar una solución a este conflicto y la solución en general radica en permitir que los alumnos adquieran los conocimientos necesarios para poder "ver".

Durante un tiempo resultó frecuente que el docente presentara directamente los conocimientos apoyándose en la observación dirigida de la realidad o de una representación, suponiendo que los alumnos son capaces de apropiárselos y de entender su empleo en otras situaciones (Bethelot y Salim, …). En este tipo de situaciones se impone el modelo pero el trabajo de modelización está ausente, el problema aparece de manera evocada, no se favorece la puesta en juego de las representaciones de que disponen los alumnos, ni tampoco la posibilidad de modificarlas en función de la situación. Tampoco se promueve la explicitación y justificación de sus procedimientos.

Siguiendo a los mencionados autores podemos decir que en la enseñanza usual, frecuentemente se privilegian prácticas como las descriptas, denominadas **ostensivas.**

Entendemos por ostensión una práctica de la enseñanza en la cual el docente presenta directamente los conocimientos geométricos apoyándose en la observación "dirigida" de una realidad sensible o de una representación, dando por supuesto que los alumnos son capaces de apropiárselos y de entender su empleo en otras cuestiones.

ACTIVIDAD 6

(para revisar en el encuentro presencial)

A fin de diferenciar las prácticas usuales de las prácticas enmarcadas en nuestro enfoque le proponemos la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 7

(para revisar en el encuentro presencial)

Primera parte
Analice los problemas que se incluyen en el Anexo 3 e indique:

- ¿Cuáles le parecen interesantes y por qué?
- Las características del tipo de trabajo matemático que debe realizar el alumno para resolverlos.

Segunda Parte:
Lea el Anexo 4 y complemente las respuestas a la Primera Parte

Hacia una argumentación deductiva

Por lo general, los docentes coincidimos en que el ingreso de los alumnos a la ESB supone un cambio en sus prácticas matemáticas. Este cambio de prácticas plantea un juego delicado de rupturas y articulaciones: los alumnos deberán renunciar a muchas de las elaboraciones realizadas durante la EPB pero a su vez deberán apoyarse en las mismas para producir las modificaciones que los nuevos desafíos les demandan.

Dentro de las transformaciones que atraviesan la totalidad de las nociones y conocimientos a enseñar, nos detendremos en analizar las referidas a las continuidades y rupturas que acompañan el tránsito que implica el pasaje de las argumentaciones empíricas hacia las argumentaciones deductivas. Si bien los inicios de este tránsito competen a la EPB, es responsabilidad de la ESB gestionar su consolidación.

En lo referido a la Geometría, no estamos pensando en una práctica ostensiva en EPB y una argumentativa en ESB. La argumentación comienza a trabajarse desde los primeros años de EPB, bajo el supuesto de que la calidad de las argumentaciones evolucionará a medida que los alumnos avancen en la escolaridad y las prácticas que desarrolle.

A fin de ejemplificar dichas transformaciones, en el marco del enfoque del diseño de nuestra jurisdicción, les proponemos realizar la siguiente actividad[1].

ACTIVIDAD 8

(para revisar en el encuentro presencial)

Lea el Anexo 5 y vincule los análisis realizados por la autora con los aspectos desarrollados en el apartado **La enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria Básica** del Diseño Curricular de Matemática para 7.

Propósitos de la enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria y su relación con las expectativas de logro para primer año

Entre las Expectativas de Logro para 1º año y los propósitos es posible establecer una relación de secuencia y complejidad. Las expectativas señalan el comienzo del camino para poder alcanzar los propósitos generales de toda la ESB. A partir de esta relación general le solicitamos que establezca relaciones específicas entre los propósitos y expectativas enunciados referidas a los contenidos y su secuenciación y a la modalidad de trabajo a desarrollar con los alumnos de primer año, tendientes a que puedan alcanzar los propósitos enunciados para los tres años de la ESB.

[1] En el desarrollo del apartado titulado Organización de Contenidos del diseño de esta jurisdicción se sugiere trabajar los contenidos incluidos en la situación descripta.

ACTIVIDAD 9

(para revisar en el encuentro presencial)

Lea los apartados “Propósitos Generales para Matemática en la ESB” y las “Expectativas de logro para primer año”. Enuncie las relaciones que haya detectado y justifique.

La enseñanza de la Matemática en primer año de la Educación Secundaria

En esta instancia nos centraremos en el análisis de la Organización de Contenidos incluida en el Diseño Curricular de Matemática de primer año de ES. Para ello, le proponemos la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 10

(para revisar en el encuentro presencial)

Primera Parte
Lea el apartado correspondiente y establezca relaciones con las expectativas de logro.

Segunda Parte
Para cada eje, seleccione un nodo y mencione con qué contenidos de otros ejes podrá trabajar durante su tratamiento.
Le recordamos que anote sus observaciones para discutir en el encuentro presencial.

ACTIVIDAD 11

(autocorrección)
Ahora le solicitamos que se centre en el eje titulado Geometría y Magnitudes y que formule tres interrogantes que le surjan. Tenga presente que volveremos sobre los mismos a lo largo del desarrollo de este Módulo.

La evaluación de la Matemática en el primer año de la Educación Secundaria

Para abordar este apartado le solicitamos que complete la lectura del Diseño Curricular, centrándose en el apartado titulado "Orientaciones para la evaluación".

Como se puede observar, se separan las orientaciones de evaluación de las didácticas, aun sabiendo que deberían estar incluidas. Esto se debe al interés en resaltar la importancia de las primeras, dado que no hay desarrollos al respecto en los diseños previos.

Centrados en el enfoque de evaluación al que adherimos, le solicitamos que resuelva esta actividad y que guarde sus respuestas, pues será necesario volver sobre ellas al estudiar la Unidad 3.

ACTIVIDAD 12

(autocorrección)

Analice el caso presentado y reflexione en torno al mismo en el marco del enfoque adoptado en el Diseño de esta jurisdicción.

El caso del cierre de notas

Un profesor de Matemática enfrenta el "cierre de notas" en sus cuatro cursos de 1° de ESB, dos de ellos, correspondientes a una escuela urbana diurna, uno correspondiente a una escuela rural y el cuarto a una escuela suburbana diurna.
Busca evaluaciones que utilizó en 7° año de EGB durante 2002 Y 2003, elabora la evaluación recortando y pegando siete ejercicios diferentes y se dispone a administrar la prueba escrita en sus cursos de 1°.

A modo de síntesis queremos destacar que pensar la evaluación desde el enfoque al que adhiere el Diseño Curricular implica considerarla no sólo como una instancia de información acerca del estado del saber de los alumnos sino también como instancia de reprogramación de la enseñanza. Esta temática se desarrolla en la Unidad 3 de este módulo.

Unidad 2.

La incidencia de la gestión de clase y de la secuenciación de actividades en los aprendizajes matemáticos

Contenidos

Las organizaciones grupales posibles y su importancia en los aprendizajes matemáticos: ejemplos referidos a la Geometría y a las Magnitudes. La gestión del docente y las interacciones en la clase: interacciones entre los alumnos y los problemas, entre los alumnos entre sí, entre los alumnos con el docente. Secuenciación de actividades. Criterios de secuenciación.

La clase de Matemática

Introducción

Como se desprende de lo trabajado hasta ahora, en esta perspectiva se propone un aprendizaje centrado en la resolución de problemas[1]. Sin embargo, no sólo se trata de la selección del enunciado de un "buen problema". Como se señala en nuestro Diseño Curricular:

"Es necesario destacar que la sola resolución de problemas no es suficiente: para la construcción de conocimientos transferibles a situaciones nuevas es necesaria la reflexión sobre lo realizado y la intervención del docente para que establezca las relaciones entre lo construido y el saber científico."

[1] En el módulo Aportes para el fortalecimiento de la Enseñanza de la Matemática en la EGB, páginas 24 y 25, se incluyen algunas condiciones que deberían cumplir los problemas, según Regine Douady. Le sugerimos que las lea o las relea antes de continuar con la lectura de este módulo.

En efecto, el tipo de construcción que se puede hacer sobre los objetos matemáticos depende de las prácticas asociadas a los mismos. Hacer matemática implica "ocuparse de problemas" lo que involucra tanto resolverlos como formularlos. Para ello es necesario que el alumno disponga de conocimientos que funcionen en el nivel de las resoluciones, en el de las formulaciones y en de las argumentaciones. No aprenden lo mismo quienes resuelven un problema y luego pasan a otro y luego a otro, que quienes resuelven esos mismos problemas, individualmente o en grupo, y luego reflexionan sobre sus producciones. Dicha reflexión implica explicitar los procedimientos realizados y analizar la vinculación entre las diferentes producciones, argumentar a partir de los cuestionamientos de otros compañeros para defender el propio punto de vista, formular sus objeciones. El pasaje de lo implícito a lo explícito permite nombrar el conocimiento, hacerlo público y, por ende, modificarlo. Este trabajo implica también ubicar el conocimiento en cuestión en una red de conceptos vinculados con él, analizando las diferentes relaciones. Además, la selección de problemas permitirá –o no- que a partir de un trabajo de reflexión se categoricen los problemas que pueden ser resueltos con ese conocimiento y cuáles no. Es decir que es parte del aprendizaje delimitar el concepto en cuanto a su alcance.

El aprendizaje se ubica dentro de la clase a través de un proceso de negociación entre los alumnos, y entre los alumnos y el docente. Las interacciones entre los alumnos se manifiestan en las discusiones con respecto a los problemas, en las formulaciones que acompañan a los razonamientos, en la búsqueda de soluciones en grupos pequeños, en la formulación de la propia solución ante los demás, en volver en forma colectiva sobre tales soluciones, en la argumentación crítica con respecto a las diferentes estrategias que han sido desarrolladas por otros compañeros.

Considerando que los procesos sociales son parte integrante de la actividad matemática, es necesario enfatizar por una parte, en la construcción individual del conocimiento a través de la interacción social, y por otra, en el proceso de comunicación, dado que el mismo permite negociar y compartir significados. Esto no significa que se abandone el trabajo individual del alumno sino que los conocimientos que del mismo deriven se potencian y resignifican a partir del trabajo con otros.

Como señalamos, si bien el aprendizaje es un logro individual, es necesario considerar que en la escuela este proceso se desarrolla en el grupo de la clase. Importantes trabajos

de investigación en el área muestran cómo juega la dimensión social de la clase en la construcción de los conocimientos en el aula; el rol que ocupan los otros de la clase, el tipo de interacciones que se producen y cómo intervienen estos factores en el proceso de aprendizaje de cada alumno.

Como destaca Laborde (1991)[2]:

"La contradicción de dos puntos de vista opuestos es más fácilmente percibida que la contradicción proveniente únicamente de los hechos a los cuales es confrontado un individuo aislado... Esta contradicción de origen social es también más difícil de refutar, un alumno solo puede vacilar, oscilar entre dos puntos de vista opuestos. La confrontación con otro lo obliga a tener en cuenta la opinión de este último. Para concluir exitosamente la tarea común, los alumnos tienen interés en dejar atrás el conflicto y es en sus ensayos de reglamentar el conflicto que pueden arribar a coordinar dos puntos de vista opuestos en un tercero que deje atrás las contradicciones."

Este tipo de interacción propicia debates, explicitaciones y argumentaciones que favorecen la evolución de los conocimientos de los alumnos. Las estrategias, respuestas, miradas de otro sobre la misma cuestión obligan a un trabajo de descentración del propio punto de vista, originando un tipo de "conflicto" que puede movilizar los conocimientos puestos en juego con la consiguiente re-estructuración de los mismos. Es de interés resaltar que la incidencia de tales conflictos en la apropiación de conocimiento no sólo proviene de la interacción del sujeto con otros que estén más avanzados o que poseen conocimientos más amplios sobre el tema que está intentando aprender, sino que también son productivos los intercambios con pares cuyos conocimientos sean similares pues permiten que el alumno diferencie su respuesta y considere cuestiones que no había tenido en cuenta. El intercambio con alumnos cuyos conocimientos son errados permite por otra parte, hacer explícitas esas concepciones que de otro modo podrían quedar encubiertas, lo que permitirá la resignificación por parte del alumno a partir de las intervenciones del docente.

En matemática, para que los alumnos "entren" en el juego de esta disciplina, en sus formas de hacer y de pensar, de comunicarse, de resolver, de argumentar, etc., es decir,

[2] Laborde, C. (1991) Diversos aspectos de la dimensión social en las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Traducción de circulación interna.

para entrar en su "cultura" es necesario generar momentos de intercambio en pequeños grupos y también con la totalidad de la clase. La gestión de la clase en tales momentos ha de ser tal que se genere en el aula una "comunidad de pares" que discuten sus producciones, con un "tutor" que coordina e interviene cuando es necesario.

Tal como señala Brousseau[3] **(1993):**

> **"...el profesor debe simular en su clase una micro sociedad científica si quiere que los conocimientos sean formas económicas para plantear buenas preguntas y zanjar debates, si quiere que los lenguajes sean instrumentos para controlar situaciones de formulación y que las demostraciones sean pruebas".**

En ese sentido es posible pensar la clase de matemática como un lugar privilegiado para aprender acerca de las reglas sociales del debate y de la constitución de una "verdad común" que será compartida en la clase.

El entrar en esta nueva cultura implica comprender que la resolución de un problema tiene que ser acompañada de una explicación que avale lo hecho, que permita explicitar las ideas sobre las que el alumno se basó. Pero también es necesario que el alumno pueda escuchar las objeciones de los demás alumnos y del docente que ponen a prueba su producción.

Estos momentos de trabajo hacen que los niños se enfrenten a una práctica de la matemática no mecánica y fundamentada.

Vale aclarar que esta manera de trabajo requiere de un aprendizaje. Sería una ilusión pensar que las prácticas habituales pueden cambiarse sólo a partir del pedido de un docente. Los estudiantes tienen que aprender que se espera que fundamenten sus respuestas, que las expliquen y que aprendan a hacerlo, que la interacción con los pares es también una fuente de aprendizaje, que compartir sus producciones –correctas o no- también constituyen momentos de aprendizaje para él y sus compañeros, etc.

Pero, ¿cómo se enseñan estas cuestiones? Claramente no se puede dar una clase sobre la manera de trabajar en Matemática, sino que es una idea que se va construyendo a lo largo del tiempo, a partir del trabajo con problemas y de una gestión particular de la clase por parte del docente que ponga en relevancia el respeto por la opinión de todos, la valoración por los distintos modos de resolver que pudieran aparecer, la concepción del error como parte del proceso de la construcción de conocimientos. En resumen, un docente que entiende la diversidad como parte constitutiva de este enfoque de enseñanza, no como un obstáculo, al aceptar que la discusión y la validación son instancias posibles de llevar adelante si existe la diversidad de ideas, conocimientos, etc.

[3] Brousseau, G. (1993) Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática, RDM, Francia. Traducción de la UNCba

Un ejemplo: la desigualdad triangular

A fin de ejemplificar un trabajo como el que describimos, analizaremos una situación cuya finalidad es estudiar la desigualdad triangular[4] y que los alumnos establezcan los límites de la constatación sobre un dibujo como forma de validación.

Esta propiedad afirma que:
"En todo triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos"

Para ello, el docente solicitará a los alumnos que fijen las medidas de los lados de un triángulo y exploren qué condiciones deben cumplir los mismos para que el triángulo pueda construirse. A fin de facilitar la tarea, se propone que trabajen con medidas comprendidas entre 2 cm y 8 cm.

En función del objetivo del problema, es necesario que los alumnos trabajen con papel liso, pues de lo contrario es posible que no se planteen dificultades respecto de las construcciones, que es lo que permite establecer los mencionados límites.

Este primer trabajo exploratorio por parte de los alumnos será un tanto caótico, debido a que no es un conocimiento habitual ni que se haya planteado anteriormente que hay condiciones sobre las medidas de los lados. Los alumnos suelen creer que siempre es posible construir un triángulo si se cuenta con las medidas de sus tres lados.

Se plantea en primera instancia un trabajo individual para que los alumnos lleguen al intercambio grupal con alguna hipótesis sobre la que comenzar a discutir.

[4] Esta situación ha sido elaborada a partir de la descripta en Arzac, G. y otros (1991), Iniciación al pensamiento deductivo, Presses Universitaires de Lyon, Francia.

Una vez que el grupo elabore una hipótesis común, se pondrá a prueba a través del siguiente problema, que marca un "límite" respecto de la posibilidad de construcción.

¿Es posible construir un triángulo, cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y 7 cm?

Para analizar el problema, el docente puede plantear a los grupos que discutan si es posible o no construir un triángulo, que se pongan de acuerdo y que escriban las conclusiones. La riqueza de esta etapa reside en la posibilidad de instalar una discusión dado que, a partir de las construcciones realizadas, algunos alumnos pueden opinar que no es posible construir el triángulo pero otros opinar que sí, pues han logrado trazar un verdadero triángulo, bastante aplanado pero no completamente. La creencia de que tiene que poder construirse el triángulo es más fuerte que la "evidencia" de que no se puede construir. Los argumentos en contra de la construcción no aparecen porque no hay ningún cuestionamiento por parte del alumno. Debido a esto, "forzarán" sus instrumentos de medición para obtener un triángulo.

Puede suceder que otros alumnos opinen que la posibilidad de construcción depende del orden en que se consideren los lados. Algunos afirman que es posible si se comienza con el lado de 7 cm pero no es posible si se comienza con el lado de 3 cm o con el de 4 cm.

Cuando se hayan establecido acuerdos en el interior de cada grupo, el docente puede organizar un debate con la participación de toda la clase para someter a discusión las diferentes producciones, qué conviene seleccionar según diferentes criterios (similitud, errores representativos, etc). El grupo autor aportará las aclaraciones necesarias y los restantes grupos analizarán la pertinencia de las argumentaciones propuestas.

Si surgen las propuestas señaladas anteriormente, es conveniente comenzar poniendo a consideración las que afirman que sí es posible construir el triángulo, para continuar luego con las que consideran que dicha construcción depende del orden en que se consideren los lados, otorgando un tiempo suficiente para que los alumnos puedan analizar cada una de ellas. Si los alumnos persisten en esta última propuesta puede sugerirse construir un triángulo cualquiera (por ejemplo, uno de 3 cm, 4 cm y 8 cm de lado) tomando los lados en diferente orden. Una vez descartadas las argumentaciones

anteriores, si resulta necesario puede darse lugar a los grupos que sostenían que no se puede construir el triángulo.

Como puede desprenderse de la situación descripta, para que el trabajo con otros resulte eficaz, no debe limitarse a la confrontación de resultados entre pares sino a la resolución de un problema en conjunto. Además, el rol del docente cobra un lugar especial. No es él quien dice cuál respuesta es correcta durante el debate. Dejará que los grupos tomen decisiones y traten de defenderlas.

Luego, se hará cargo de plantear a los alumnos qué conviene registrar de este debate. De esta manera, está trabajando también sobre una herramienta de estudio, que es la carpeta.

Este modo de trabajo permitirá que los alumnos comiencen a elaborar conocimientos que no surgen para todos de la actividad individual. Por una parte, las condiciones de existencia del triángulo, y por otra, un aspecto característico de los modos de producción del conocimiento matemático: no es posible decidir acerca de la validez de una conjetura a partir de representaciones materiales. La "construcción" puede llegar a ser posible a través de un uso particular de los instrumentos, a la falta de precisión. Sin embargo, la construcción no asegura que el triángulo exista. Es necesario acompañar lo que se diga con argumentos matemáticos.

Entonces, el trabajo del docente tiene que girar en torno a varias cuestiones:

- Un dibujo no es suficiente para decidir sobre la posibilidad o no de construcción, aunque sí lo es si está acompañado de un razonamiento matemático que dé razones a las conclusiones que se obtengan.
- No importa cuál sea el lado que se elija para empezar a construir un triángulo. En los tres casos se obtiene el mismo triángulo pero cambiado de posición.
- No es posible construir un triángulo en el cual un lado sea igual a la suma de los otros dos. Eligiendo como "base" el lado mayor, los otros dos quedan sobre el mismo sin lograr formar el triángulo.
- Si se dan como dato tres segmentos, donde la medida de uno de ellos es igual a la suma de las medidas de los otros dos, entonces no es posible construir un triángulo cuyos lados midan lo que estos segmentos.

Es importante aclarar que este problema puede tener varios objetivos, pero en todos los casos comienza a mostrar que no se pueden elegir los lados de un triángulo al azar, que hay alguna restricción para la construcción.

Para comenzar a trabajar directamente sobre la idea de desigualdad triangular será necesario plantear otras situaciones que lleven a concluir lo que esta propiedad afirma. En síntesis, para favorecer la construcción de sentido de los conocimientos por parte de los alumnos, es importante que en la clase se contemplen diferentes instancias:

- De presentación de las situaciones para su resolución individual y en pequeños grupos;
- De resolución efectiva por parte de los alumnos, en las que las intervenciones del docente se centren en aclarar consignas y alentar la resolución sin intervenir de modo directo, sugiriendo lo que "se debe hacer", evitando las correcciones parciales mientras los alumnos resuelven ya que pueden ocasionar que las concepciones erradas no aparezcan para ser discutidas, explicitadas;
- De confrontación de resultados, de procedimientos y de argumentos empleados, en las que el docente organiza la reflexión sobre lo realizado e instancias en las que el docente realiza una síntesis de los conocimientos a los que llegó el grupo y establece las relaciones entre el conocimiento que circuló en la clase y aquel que pretendía enseñar, pone nombres a las propiedades, en caso de que sean nuevas, reconoce ciertos conocimientos producidos por los alumnos y los vincula con otros ya estudiados, o con nuevos a trabajar, es decir comienza a **institucionalizar** los nuevos conocimientos.
- Tiene que haber también un lugar para que los alumnos estabilicen y se familiaricen con los conceptos que ya aprendieron, con los que ya tuvieron una primera interacción, enfrentados a la resolución de otros problemas que conlleven a una reutilización de conceptos y técnicas ya aprendidas.

La institucionalización es el momento de la clase en el que el docente establece las relaciones que existen entre las producciones de los alumnos y el saber al que se apunta con la actividad.

Es importante notar que se trata de un proceso que va más allá del reconocimiento "cultural" del saber en juego, y a partir del cual los conceptos identificados pueden ser reutilizados por los alumnos en la resolución de nuevos problemas.

En el caso presentado sobre la desigualdad triangular, el docente puede tomar las conclusiones de los diferentes grupos, ponerlas a discusión y decidir entre todos cuál es correcta, cuál no y por qué.

Luego, podrá institucionalizar dos cuestiones:

- En un triángulo no es posible que un lado sea igual a la suma de los otros dos.
- En un triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos.

En cuanto a la primera afirmación, alguien podría pensar que es redundante, que se deduce de la segunda. Es cierto desde la Matemática. Al pensar en su enseñanza hay que considerar estados intermedios al del aprendizaje del concepto, donde se aprenden propiedades más locales, menos generales y abarcativas que la desigualdad triangular, en este caso.

Una vez que los alumnos hayan aprendido la desigualdad triangular y puedan aplicarla, seguramente retendrán su formulación más general, aunque no es necesario.

Para profundizar lo trabajado

ACTIVIDAD 1

(para revisar en el encuentro presencial)
Primera Parte
Lea el extracto incluido en el Anexo 6 con relación a la situación que acabamos de describir, analice:

- La organización propuesta
- Las intervenciones sugeridas

Segunda Parte
Responda las siguientes preguntas, dando razones para su respuesta:

- ¿Qué cree usted que debería quedar escrito en el Pizarrón?
- ¿En qué momentos considera que debería haber instancias de institucionalización? ¿Sobre qué?

ACTIVIDAD 2

(ítem correspondiente a la evaluación de proceso)

Lea registro de clase que se incluye en el Anexo 7 y responda las siguientes preguntas dando razones para sus respuestas.

1) ¿Cuál es el saber matemático, procedimiento o técnica que se quiere enseñar?

2) ¿Qué conocimientos cree que el alumno debiera tener para poder abordar la situación?

3) ¿Es posible identificar momentos de avance del conocimiento?

4) ¿Es posible interpretar las acciones de los alumnos en términos de concepciones matemáticas, correctas o no?

5) ¿El problema le devuelve a los alumnos información sobre las consecuencias de sus elecciones? ¿Hay devoluciones a partir de algún tipo de interacción?

6) ¿Considera que las intervenciones del docente fueron pertinentes? ¿Por qué?

8) ¿Por qué la docente hace esa última afirmación?

9) ¿Qué concepciones rechaza la puesta en juego de esta actividad?

10) ¿Qué preguntas, además de las expuestas en este análisis, agregarían, cambiarían o quitarían?

ACTIVIDAD 3

(para revisar en el encuentro presencial)

Antes de leer el material incluido en el Anexo 8, responda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo estudian sus alumnos?
- ¿Hay alguna actividad que les dé que tenga por objetivo ayudarlos a estudiar? Si es así, ¿cuál o cuáles?

Lea el Anexo. Responda ahora las siguientes preguntas.

- Revise sus respuestas a las primeras preguntas que respondió. ¿Las modificaría? ¿Por qué y cómo?
- ¿Cuáles de las estrategias planteadas considera viable con sus alumnos? ¿Por qué?
- Proponga alguna otra actividad de estudio que no esté incluida en el fragmento.

Secuenciación de las actividades

Introducción

Dijimos más arriba que, hacer matemática implica "ocuparse de problemas". También dijimos que se requieren además, múltiples reflexiones a propósito de los mismos. Quisiéramos plantear ahora, la necesidad de que esos problemas estén seleccionados y organizados en función de: los contenidos que se quieren enseñar, los conocimientos previos de los alumnos, el tiempo que el docente decide utilizar para su enseñanza, el tipo de vinculación que quiere establecer con otros conocimientos, el tipo de materiales con los que pueda contar, la complejidad y alcance de ese conocimiento al que se quiere arribar, etc. Estamos pensando, entonces, en la necesidad de secuenciar las actividades de enseñanza en un orden temporal, a partir de criterios como los mencionados.

El siguiente ejemplo muestra una secuencia para la elaboración de la propiedad que verifican los ángulos interiores de un triángulo. A partir de su análisis proponemos discutir acerca de la secuenciación de los contenidos.

Queremos aclarar que no esperamos que el docente elabore secuencias de aprendizaje, lo que constituye una tarea muy compleja. Nuestro interés radica en proporcionar herramientas para que los docentes puedan analizar o reformular secuencias prediseñadas.

Analizando la suma de los ángulos interiores de los triángulos[5]

Para abordar este tema proponemos una serie de problemas que apuntan a que pueda demostrarse que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º. El tipo de práctica para el trabajo en geometría que planteamos, intenta alejarse del trabajo empírico para insertar lo geométrico en el terreno de la deducción. Por esta razón, desalentamos cualquier intento de "demostrar" este concepto a través del recorte de los ángulos del triángulo, del calcado de los tres ángulos de manera consecutiva o de la medición de los tres ángulos y la posterior suma de los mismos. Sabemos que en toda medición siempre hay error; cabe preguntarse entonces, ¿cuál es la relación entre las constataciones y la propiedad en cuestión? ¿Por qué si han obtenido valores cercanos a los 180º, el enunciado dice 180º? ¿Quién salda la diferencia entre lo realmente hallado y la formulación teórica? Solo la autoridad del discurso del docente hace posible que los niños "crean" en la propiedad, que por otra parte, contradice una concepción usual de los alumnos según la cual "el tamaño" de un ángulo depende de la longitud de los lados.

PROBLEMA 1:

Dibujen un triángulo que tenga un ángulo de 60º y otro de 30º. ¿Cuántos se pueden construir?

Este primer problema apunta a varias cuestiones. Por un lado, analizar que si se dan como dato dos ángulos, el tercero queda determinado. Esto se ve en la construcción. Al poner dos de los ángulos, el triángulo se "cierra", sin dar posibilidad de elegir el tercer ángulo. Es importante analizar este hecho como brindando información sobre una dependencia, aunque por ahora no interesa explicitar cuál es.

Otra cuestión importante tiene que ver con el concepto de ángulo. Suele ser una creencia de los alumnos que los lados de los ángulos son segmentos y no semirrectas. Esto significa que muchas veces se consideren como diferentes a ángulos que no lo son, sólo por el hecho de tener lados "más largos". Debido a esto es muy posible que los alumnos crean que se puede construir un solo triángulo. Será tarea del docente tomar esto en la puesta en común y concluir, junto con los alumnos, que hay infinitos

[5] Adaptación de: Ponce H., Quaranta, M.E. Coordinación Patricia Sadovsky. "Grado de aceleración 6º y 7º" Proyecto Conformación de Grados de Aceleración. Dirección General de Planeamiento. GCBA.(2004)

triángulos que no tienen el mismo tamaño pero sí la misma forma. En este momento se le puede poner el nombre de "triángulos semejantes".

Es fundamental pensar qué de lo que se ha hecho debería quedar registrado en las carpetas, de modo que el alumno pueda recuperar lo que se hizo y las conclusiones en el momento de estudiar.

PROBLEMA 2:

Dibujen un triángulo que tenga un ángulo de 120º y otro de 100º. ¿Cuántos se pueden construir?

Es esperable que los alumnos intenten construir el triángulo, de la misma manera que en el problema 1 y vean que "no se cierran los lados".

El objetivo de este problema es seguir profundizando sobre la relación entre los ángulos, y en este caso se agrega que no cualquier ángulo sirve para construir un triángulo.

Sigue sin ser objetivo explicitar nada. Por ahora se tiene que hay una relación entre los ángulos de un triángulo, que conociendo dos el tercero queda determinado, y que no siempre es posible construir un triángulo dados dos ángulos.

PROBLEMA 3:

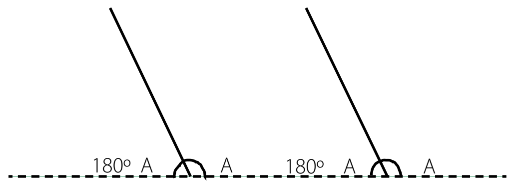
Dibujen un triángulo que tenga dos ángulos de 90º. ¿Cuántos se pueden construir?

Se sigue con este problema avanzando sobre las restricciones. Con dos ángulos rectos seguro que no se puede construir un triángulo y se puede explicitar una propiedad: "Ningún triángulo puede tener dos ángulos que midan 90º".

PROBLEMA 4:

Dibujen un triángulo que tenga un ángulo de 120º y otro de 60º. ¿Cuántos se pueden construir?

Surge en este problema un caso similar al planteado en el anterior. Los lados quedan paralelos, lo cual impide la construcción de un triángulo. Podría pensarse bajo qué *condiciones los lados son paralelos:*



Usando conocimientos sobre ángulos adyacentes es posible concluir que si los ángulos que se dan como dato suman 180º, entonces los lados son paralelos y no se puede construir el triángulo. Esto, por supuesto, debe quedar a cargo del docente.

CUESTIÓN

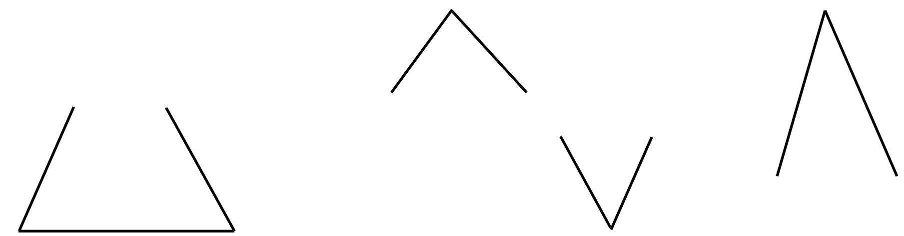
Teniendo en cuenta los problemas anteriores, analicen la siguiente afirmación: *"Para que pueda construirse un triángulo, la suma de dos de sus ángulos debe ser siempre menor que 180º"*

Los problemas anteriores pueden ser usados como ejemplos que permiten la exploración de la validez de la afirmación planteada.
No se espera una respuesta acabada, aunque sí algo como: "si los lados son paralelos, o sea cuando los ángulos suman 180º, no se puede construir un triángulo. Si suman menos de 180º, se puede. Si suman más de 180º, los lados no se van a cortar y tampoco puede construirse un triángulo.
Esta secuencia permite anticipar si algunos triángulos van a poder ser construidos o no. Aquellos en los que la suma de dos de sus ángulos da un resultado menor que 180º se pueden construir.
El problema que sigue apunta a que los niños puedan atrapar la idea de que, en un triángulo, al conocer dos ángulos, el tercero queda determinado por los otros dos, es decir depende de la amplitud de los otros.

PROBLEMA 5:

(Para resolver de a dos)

En la ilustración que puede verse más abajo hay un triángulo al que se le ha borrado uno de sus ángulos. Lo que ustedes tienen que hacer es encontrar cuál o cuáles de los ángulos que se ofrecen permiten reconstruir el triángulo. Para ello pueden utilizar la estrategia que crean más conveniente, la única condición es que primero deben ponerse de acuerdo y elegir uno de los ángulos y recién después calcarlo para comprobar si coincide con el resto del triángulo.



CUESTIÓN

¿Es verdad que si conozco dos ángulos de un triángulo, el tercer ángulo ya queda determinado por esos dos?

Este problema pone en juego que no es posible poner cualquier ángulo, que hay uno que va y no otro. Esto muestra que si se conocen dos ángulos, hay una única posibilidad para el tercero.

PROBLEMA 6

Dibujen un triángulo en el que la suma de los ángulos interiores dé un valor lejano a 180º.

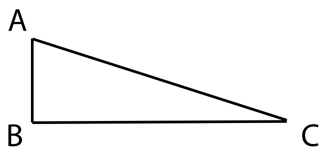
Esta situación apunta –y eso es lo que deberá remarcarse- a que los alumnos puedan establecer la hipótesis de que no es posible dibujar un triángulo en el que la suma de los ángulos interiores dé un valor lejano a 180º, aunque no estén en condiciones de argumentar por qué. En otras palabras, el objetivo del problema anterior es que la conjetura pueda emerger, no que sea validada.

Esa validación será motivo de reflexión a partir de la actividad siguiente:

PROBLEMA 7

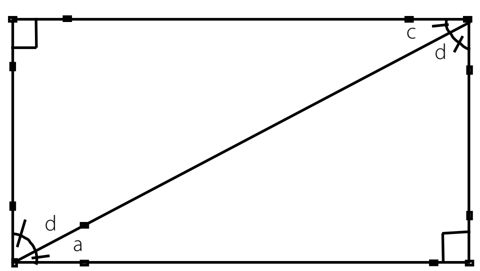
(Para resolver en grupos)

Recuerden que un triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo recto, como por ejemplo, el que muestra la siguiente figura:



El ángulo que tiene vértice en B es recto.

- Analicen si es posible armar un rectángulo a partir de dos triángulos rectángulos congruentes. ¿Esto será posible siempre?
- Analicen en el siguiente rectángulo construido a partir de dos triángulos rectángulos congruentes, las relaciones entre sus ángulos.

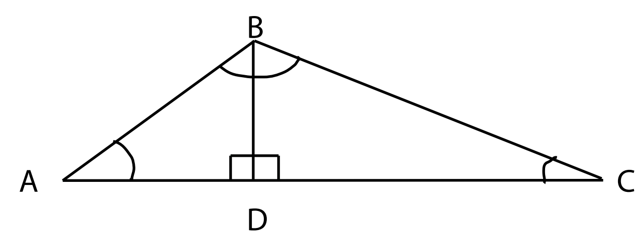


Los alumnos podrán apoyarse en que los triángulos son congruentes, por lo cual también lo son sus ángulos. Entonces, si se ubican los dos triángulos en la misma posición puede verse que c = a y b = d (ponerle simbolito de ángulo).

El docente podrá luego hacerse cargo de trabajar junto con los alumnos las siguientes cuestiones:

- ¿Es posible saber cuánto vale la suma entre los ángulos a y d? ¿Y entre c y b? Quedará establecido que a + d = 90º y c + b = 90º.
- Ya vimos que c = a y b = d. ¿Es posible saber cuánto vale la suma entre los ángulos d y c? ¿Y entre a y b? En este caso, como c es igual al ángulo a, resulta que d + c = d + a = 90º y que a + b = c + b = 90º.
- ¿Cuánto da la suma de todos los ángulos interiores de cada triángulo rectángulo? ¿Existe un caso de un triángulo rectángulo en que esta propiedad no se cumpla?
- ¿Qué sucede con esta propiedad si el triángulo no es rectángulo? ¿Se podría afirmar la validez de la propiedad: "la suma de todos los ángulos interiores de un triángulo es de 180º"?

Para resolver lo anterior, analicen la siguiente afirmación: "cualquier triángulo puede "descomponerse" en dos triángulos rectángulos" Por ejemplo.



El docente puede usar lo que se acaba de discutir y establecer los siguientes hechos con los alumnos:

- La suma de los ángulos de los triángulos ABD y BDC es 180º, entonces:

$a + b_1 + d_1 = 180º$ y $b_2 + d_2 + c = 180º$

Luego, $a + b_1 + d_1 + b_2 + d_2 + c = 180º + 180º = 360º$

Pero como $d_1 + d_2 = 180º$ y $b_1 + b_2 = b$, resulta:

$a + (b_1 + b_2) + (d_1 + d_2) + c = 360º$

$a + b + c + 180º = 360º$, o sea que $a + b + c = 180º$.

A partir de este análisis se puede afirmar que: **La suma de los ángulos interiores de todos los triángulos es de 180º.**

ACTIVIDAD 4

(para revisar en el encuentro presencial)

Primera parte

Analice y describa el rol del docente en la secuencia propuesta.

Segunda parte

Para demostrar que los dos triángulos rectángulos que construyen el rectángulo son congruentes, alguien podría proponer recortarlos y superponerlos. Argumente acerca de esa propuesta y formule una alternativa.

Le recordamos que anote sus observaciones.

ACTIVIDAD 5

(integra la evaluación de proceso)

Lea la propuesta incluida en el Anexo 9 y proponga dos problemas para trabajar anteriormente y dos a continuación. Explique cuál es la finalidad de cada uno de ellos.

A modo de cierre

ACTIVIDAD 6

(autocorrección)

Vuelva sobre los interrogantes que planteó en la **Actividad 11** de la Unidad 1, amplíelos, modifíquelos o responda a los mismos. Justifique sus decisiones.

No olvide de guardar sus respuestas pues serán retomadas.

Unidad 3.

La evaluación de los aprendizajes matemáticos

Contenidos

Evaluación y Didáctica de la Matemática: interrelaciones. Evaluación y contrato didáctico. Algunos instrumentos de evaluación. Criterios de evaluación. Programas de evaluación. Evaluación y acreditación.

Hacia una evaluación formativa: el trabajo con errores persistentes de los alumnos en el aprendizaje de las nociones geométricas y de la medida. Devolución y remediación de errores significativos.

Evaluación y Didáctica de la Matemática: primeras aproximaciones

Introducción

Es posible considerar que hay muchas formas de conocer un concepto matemático, éstas dependen de todo lo que un alumno haya tenido la oportunidad de realizar con relación a ese concepto. Es éste un punto de partida fundamental para pensar la evaluación de conocimientos.

Desde esta perspectiva, dominar un concepto matemático implicaría también reconocer en qué situaciones es pertinente utilizarlo y desplegar diferentes recursos (de cálculo, de estimación, el uso de gráficos, dibujos, etc.) que pueden ser convencionales o no y que garanticen el acceso a la resolución de la situación.

Abordar la problemática de la enseñanza de la Matemática remite entonces, a formularse preguntas como las siguientes:

- ¿Qué conocimientos poseen los alumnos acerca de distintas nociones, distintos procedimientos?
- ¿Cómo evolucionan esos conocimientos?
- ¿Cuáles son las variables que caracterizan el estado de tales conocimientos y posibilitan su control?

Estos interrogantes están directamente vinculados con la evaluación de los aprendizajes.

Sin embargo, a pesar da las numerosas producciones de la Didáctica de la Matemáticas, son pocos los trabajos referidos a la evaluación.

Ahora bien, aunque tales estudios no aborden esta última temática, una reflexión profunda acerca de lo que sucede en clase da cuenta de que la evaluación es un condicionante del proceso didáctico que regula tanto los comportamientos del docente como los aprendizajes de los alumnos (Chevallard y Feldman, 1986).

En ese sentido, y reconociendo que la problemática de la evaluación incluye aspectos transversales a las distintas disciplinas, el propósito de esta unidad es poner de manifiesto que en el marco de una clase, donde se trabajan conocimientos específicos, no es posible considerar a la enseñanza y a la evaluación de los conocimientos matemáticos como acciones separadas.

Por ello, nos centraremos en algunas cuestiones que consideramos importantes, de las relaciones entre evaluación y didáctica de la matemática.

Evaluación y contrato didáctico

Las interacciones entre docente y alumno características de las clases, llevan a los alumnos a hacerse una representación interna acerca de aquello que el docente espera que él haga, es decir, de lo que "está permitido" o "no está permitido" hacer en una determinada actividad Matemática.

En el contexto de las mencionadas interacciones, Guy Brousseau (1980) define contrato didáctico como "el conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos matemáticos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno, y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro" .

Es frecuente que en las clases habituales se propongan problemas cuyo enunciado contengan todos los datos útiles para resolverlo. En ese tipo de clases también es usual que no se planteen problemas abiertos, ni problemas con datos que no se utilizan, ni problemas con datos insuficientes, ni problemas que tengan más de una solución, ni problemas sin solución. Esto hace que, por ejemplo, muchos alumnos construyan representaciones como las siguientes:

- "Para resolver un problema tengo que utilizar todos los datos que me dan".
- "En Matemática todos los problemas tienen solución".

Sin embargo, y pese al interés que presentan, los efectos del contrato didáctico muy pocas veces son tenidos en cuenta tanto para preparar evaluaciones como para interpretar respuestas de los alumnos. Tampoco son tenidos en consideración, los efectos de las evaluaciones en la constitución del contrato.

Nos centraremos entonces en:

- La incidencia de los efectos del contrato didáctico en las respuestas de los alumnos en las evaluaciones.
- La incidencia de las evaluaciones en la constitución del contrato didáctico.

Respecto de la primera cuestión, consideremos el siguiente ejemplo.
En una evaluación diagnóstica llevada a cabo a inicios de 7º año durante 2002 se presentó el siguiente ítem:

Dibujen, si es posible, un triángulo cuyos ángulos midan 50º, 75º y 60º.

La mayoría de los alumnos forzó las medidas para que se pudiera dibujar el triángulo.
Si pensamos en las clases usuales de Geometría, siempre que se propone una construcción es posible realizarla, lo que podría explicar el comportamiento de esos alumnos ante la construcción solicitada. Es posible que hayan actuado sobre la base de la representación:

"Si el Profe me pide que construya algo, se debe poder construir".

En relación a la incidencia de las evaluaciones en la constitución del contrato didáctico, resulta interesante la reflexión realizada por Johsua y Dupin, (1993):
"La evaluación refuerza..., a su manera, la función de la institucionalización. Confirma, en el cuadro de un contrato eventualmente específico de una clase lo que debe ser considerado importante y lo que es secundario, lo que es decisivo saber hacer y lo que es accesorio".
Así por ejemplo, muchos alumnos consideran que en Matemática no se estudia "teoría", pues en la mayoría de las pruebas sólo se les pide resolver actividades.

ACTIVIDAD 1

(para revisar en el encuentro presencial)

Le solicitamos que recuerde prácticas docentes que haya vivido o que le hayan comentado e identifique:

- Un posible efecto de contrato didáctico sobre las respuestas de alumnos en situación de evaluación
- Un posible efecto de evaluaciones en la constitución del contrato didáctico.

Instrumentos, criterios y programas de evaluación: consideraciones generales

Si bien todos reconocemos la complejidad que involucra obtener información acerca del estado de conocimiento de nuestros alumnos, la prueba escrita constituye el instrumento de evaluación por excelencia (cuando no el único).
Respecto de la utilización de instrumentos como la prueba, Guy Brousseau (1993) expresa:
"No es posible distinguir, por medio de las evaluaciones clásicas, los conocimientos adquiridos por una serie organizada de asimilaciones o de condicionamientos, de aquellos que son adquiridos por una génesis auténtica de conceptos".

A fin de paliar las dificultades mencionadas es posible pensar en el diseño de un programa de evaluación (Camilloni, A., 1998).

Un programa de evaluación combina diversos instrumentos para obtener una cobertura adecuada.
La eficacia del programa dependerá de la pertinencia de la combinación de los instrumentos, de los momentos en que se administran y del análisis e interpretación de sus resultados.

Otro de los aspectos centrales de la problemática de la evaluación es la comunicación fundamentada de los juicios de valor acerca de los procesos de aprendizaje de los alumnos y remite a la elaboración de criterios.

Los criterios de evaluación explicitan las cualidades de las producciones adecuadas, por lo que están directamente vinculados con el enfoque de enseñanza adoptado.

A continuación, presentamos algunos modelos de instrumentos de evaluación no convencionales y proponemos posibles criterios. Dichos instrumentos son factibles de incluir en un programa de evaluación en conjunto con pruebas escritas y con interrogatorios orales. Es decir, se trata de instrumentos que no son excluyentes sino complementarios.

Un instrumento de interés: evaluación grupal e individual

Si bien el trabajo grupal es corriente en las escuelas, esta práctica no se ha extendido, al menos en Matemática, a situaciones de evaluación de los aprendizajes. Tal como se señala en el Diseño Curricular de Matemática de primer año:

"Como en las clases se prioriza la participación y el hacerse cargo de la resolución de problemas matemáticos, esto deberá tenerse en cuenta a la hora de evaluar".

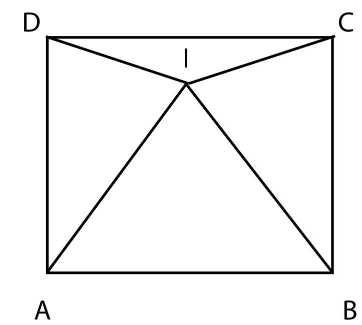
Podemos pensar en un modelo de prueba escrita que consta de dos etapas: una grupal y otra individual.

A continuación presentamos una evaluación que puede ser utilizada una vez abordados los criterios de congruencia de triángulos y resuelto problemas que involucraban el uso de los mismos[1].

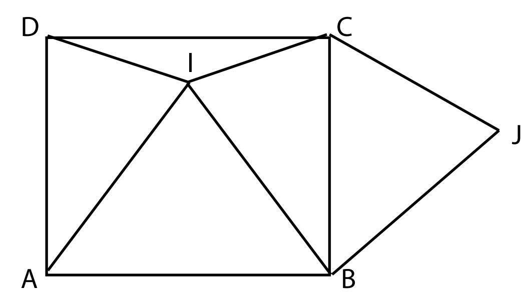
[1] Esta propuesta esta presentada exclusivamente a modo de ejemplo, pues no es posible diseñar una evaluación sin tener en cuenta el grupo de alumnos, la propuesta de enseñanza y su implementación.

ETAPA GRUPAL

Primera Parte
En el cuadrado ABCD se ha construido el triángulo equilátero ABI. Establecer la medida de los ángulos de la figura



Segunda Parte
El triángulo BJC, construido sobre el lado BC del cuadrado de la primera parte, también es equilátero.
¿Qué condiciones se tienen que cumplir para que D, I y J estén sobre la misma recta?



ETAPA INDIVIDUAL

Encuentre argumentos que le permitan decidir si las condiciones que estableció en la segunda parte del trabajo grupal son válidas o inválidas.

A continuación proponemos posibles criterios:

Etapa grupal

- Explorar y formular conjeturas utilizando los criterios de congruencia de triángulos.
- Validar las conjeturas elaboradas utilizando los criterios de congruencia de triángulos, la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, la propiedad de los ángulos congruentes de un triángulo isósceles.
- Establecer condiciones necesarias y suficientes para que tres puntos estén alineados.

Etapa individual

- Validar las condiciones establecidas en la parte grupal utilizando los criterios de congruencia de triángulos, la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, la propiedad de los ángulos congruentes de un triángulo isósceles.

Es necesario referir el criterio a cada producción particular para obtener la clave de corrección.

Una clave de corrección es una respuesta tipo que permite hacer más confiable la calificación

A la hora de corregir, debemos tener en cuenta que si en el desarrollo del trabajo grupal se cometieron ciertos errores, es previsible que algunos estudiantes los trasladen a su trabajo individual. Dado que dichos errores ya habrían sido considerados en la calificación correspondiente a la primera etapa, no se tomarán en cuenta en la segunda.

Esta propuesta permite evaluar los contenidos trabajados anteriormente pero también permite evaluar qué puede lograr un alumno en colaboración con sus pares (etapa grupal) y qué puede lograr a partir de las producciones realizadas en conjunto (etapa individual)

ACTIVIDAD 2

(ítem correspondiente a la evaluación de proceso)

Analice la secuencia correspondiente al Anexo 10 y diseñe un instrumento de evaluación grupal- individual. Indique:

- Ítems que incluiría
- Criterios de corrección que puedan utilizarse

En ambos casos fundamente su propuesta

Otro posible instrumento: los registros de observación

A continuación presentamos un registro de observación que puede ser utilizado con diferentes contenidos pues se incluyen aspectos característicos del quehacer matemático. Uds. lo modificarán y ampliarán en función de la temática a evaluar y de las características de los problemas propuestos.

Es claro que una observación circunstancial no es suficiente para obtener una información válida acerca de los conocimientos de nuestros alumnos, por lo que se hace necesario sistematizar el uso de este recurso. Debemos tener en cuenta que no podemos observar a todos los alumnos simultáneamente; sólo podremos utilizar el registro con cinco o seis alumnos por clase, lo que nos permitirá lograr una buena cobertura a lo largo del trimestre.

Registro de observación de los alumnos durante la resolución de problemas

Alumno..

Aspectos considerados	Criterios de evaluación	SÍ	NO
Las estrategias	• Reinvierte conocimientos (nociones y procedimientos) ya adquiridos • Selecciona formas de representación adecuadas al problema.		
La comunicación	• Comunica las estrategias utilizadas y las soluciones obtenidas		
La argumentación	• Argumenta a propósito de la validez de sus soluciones.		
La disposición	• Se compromete matemáticamente con la tarea. • Trabaja en cooperación con sus pares		

Evaluación versus acreditación

La preocupación de muchos docentes es que “necesitan notas” para poner en el boletín al final del trimestre, preocupación que compartimos. Además, como dijimos anteriormente, es habitual que la única manera de obtener una nota sea a través de una prueba escrita, lo que hace que a la misma se la una a la idea de acreditación.

Sin embargo, creemos que esto no debería suceder. Si el alumno sabe que le van a poner una nota y que el promedio de las notas es la nota del trimestre, se esmerará especialmente por llegar a resultados correctos **sea como sea**. Es ahí donde pueden surgir resoluciones que muchas veces no podemos siquiera interpretar ni entender.
Si hay una o dos oportunidades para definir la nota a través de pruebas escritas, es lógico que los alumnos intenten aprobar.

Esto produce efectos que, desde el punto de vista didáctico, son interesantes de analizar. Si un alumno no sabe resolver un problema y tiene el conocimiento de que “hay que hacer cuentas”, optará por hacer una cuenta cualquiera con los datos antes que no resolver. De esa manera puede tener alguna posibilidad –aunque muy remota, por cierto- de resolver bien el problema.

Otros, tratarán de copiarse. En fin, aparecerán muchísimas maneras de intentar “zafar”, pero todas ellas estarán alejadas del deseo de aprender.

Creemos que es necesario quitar el peso de la acreditación de las pruebas escritas. De esa manera, los alumnos estarán habilitados para usar las pruebas para aprender, para evaluar dónde están las dificultades y las fortalezas. El docente, por su lado, podrá usarlas para determinar cuáles son los temas que debería retomar.

Al sacarle a la prueba el peso de la acreditación, pasa a ser un instrumento de estudio muy interesante. Los alumnos tendrán posibilidad de resolverla de manera individual, traer sus dudas a clase para discutir, hacer anotaciones, discutir sobre distintas estrategias de resolución, entre otras cuestiones.

ACTIVIDAD 3

(para revisar en el encuentro presencial)

Considere la actividad Nº 12 correspondiente a la Unidad 1. Si Ud. fuese compañera de esa Profesora del Caso del Cierre de notas y ella le comentara lo que hizo en ese “caso”, ¿qué sugerencias le haría?

ACTIVIDAD 4

(ítem correspondiente a la evaluación de proceso)

Lea el material correspondiente al Anexo 11 y formule dos interrogantes.

Una mirada sobre las producciones de los alumnos

Introducción

Como docentes sabemos que no todos los alumnos aprenden las mismas cosas, en el mismo momento y al mismo ritmo, lo que nos interpela del siguiente modo:

- ¿Cuáles son las consecuencias didácticas de esta realidad?
- ¿Cómo ayudar a los alumnos que requieren mayor tiempo de aprendizaje?
- ¿Cómo interpretar la naturaleza de las dificultades a las que se enfrentan?

Las preguntas planteadas están estrechamente vinculadas con el lugar otorgado al error en los aprendizajes y, por ende, a la necesidad de reprogramar la enseñanza.
Si bien aprender a partir de los propios errores es tan antiguo como el hombre, su rol constructivo en los aprendizajes escolares es un aporte reciente.
En las prácticas pedagógico- didácticos tradicionales, los errores se evitaban y cuando no era posible hacerlo, se sancionaban. En ese sentido, se consideraba que los buenos alumnos eran los que no cometían errores y los buenos docentes los que, a partir de sus explicaciones lograban que los alumnos no cometieran errores.

En esa perspectiva, en el pizarrón sólo se escribía lo que estaba bien, y si surgía algún error rápidamente se borraba, reemplazándolo por la resolución correcta: *"El error no se escribe porque si no se fija"*, decían los viejos manuales de Didáctica. Tal era el carácter negativo otorgado a los errores que a los ortográficos se los llamaba *faltas*, y en otros casos se hablaba de *disparates*. También como decíamos en el apartado 2, hay otros fenómenos del funcionamiento de la clase que propician a encubrir el error. Realizar correcciones parciales mientras los alumnos están resolviendo, es uno de ellos.

Hoy en día el error ha cobrado una nueva consideración en el marco del enfoque didáctico: no sólo es considerado normal sino necesario para el aprendizaje, y en tal sentido debe estar integrado al mismo. Se trata entonces de correr una mirada que sólo apunta a resultados inmediatos y exitosos, para centrarla en los procesos que favorecen los aprendizajes de los alumnos.
Las producciones de los alumnos son así una información sobre su "estado de saber" (Charnay, R. 1994). En este sentido, el error es fecundo y juega un rol constructivo en la

adquisición de conocimientos. En particular, el error no se entiende como la ausencia de saber, ni tampoco como un hecho negativo que no debería formar parte de la realidad escolar.
Cuando el alumno se enfrenta a un conocimiento nuevo para él, lo hace desde sus propias concepciones, desde ciertas maneras de conocer que le han sido útiles en otros contextos, y es sobre ese mismo conocimiento "viejo" que el alumno deberá construir el nuevo. ¿Cómo llevar adelante esa tarea cuando no ha podido confrontar la representación que él hizo del problema con otras diferentes y en particular tomar conocimiento de sus posibles errores?

ACTIVIDAD 5

(ítem correspondiente a la evaluación de proceso)

Vincule los desarrollos incluidos en el apartado Marco General para la Educación Secundaria y en Diseño Curricular de Matemática y establezca relaciones con la perspectiva acerca del error que describimos.

Las producciones de los alumnos permiten registrar gran variedad de errores. Sin embargo, consideraremos errores que requieren una atención especial a aquellos que:

- **Se repiten y están instalados en el alumno**
- **No son fruto de la ausencia de conocimiento, de la distracción o del azar**

A fin de descartar errores que no resulten de importancia, en primera instancia cabe preguntarnos:

- **¿Las consignas fueron claras?**
- **¿El tiempo asignado para resolverlas fue adecuado?**
- **¿Los alumnos estaban cansados?**
- **¿Algún factor externo: última hora, proximidad del día del estudiante, por ejemplo, condicionó la tarea?**

Descartadas estas causas, podemos pensar que se trata de errores cuyos orígenes tienen real significación.

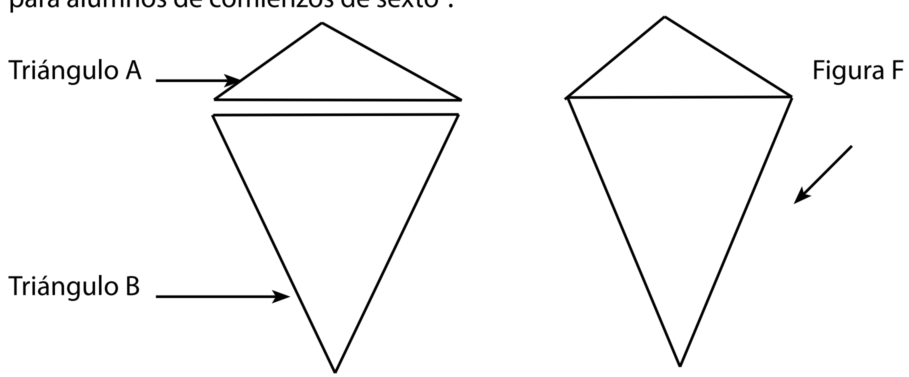
Diferentes orígenes de los errores

El problema de los orígenes de los errores ha dado lugar a propuestas de clasificación que incluyen diversas categorías En este módulo describiremos las de mayor relevancia, a nuestro entender:

- **Errores que nos informan sobre la manera de conocer de los alumnos**
- **Errores que provienen de las expectativas docente-alumno en relación con una determinada tarea (contrato didáctico)**

Errores que nos informan sobre la manera de conocer de los alumnos

A fin de analizar esta categoría de errores nos valdremos de un ejemplo propuesto por Antoine Bodin(1.997):
El siguiente ítem corresponde a una evaluación nacional realizada en Francia, en 1990, para alumnos de comienzos de sexto[2].



El perímetro del triángulo A es 12 m.
El perímetro del triángulo B es 17m.
La figura F está formada por la unión de los triángulos, como se indica en el dibujo.
¿Cuál es el perímetro de la figura F?
Escribí tus cálculos:
El perímetro de la Figura F es .... m.

Los resultados se distribuyeron de la siguiente manera:
Respuesta 19 m: 20% (correcta)

[2] El sexto curso del sistema francés corresponde a alumnos de 11 a 12 años de edad.

Respuesta 29 m: 45%
Respuesta 24 m: 0,5%
Es de interés observar que el mayor porcentaje de alumnos (45%) responde efectuando la suma entre los perímetros de los triángulos. Es decir, considerando que "El perímetro de de dos figuras unidas es igual a la suma de los perímetros de las figuras."

Este error no revela ausencia de conocimiento sino que muestra una manera de conocer, lo que permite interpretarlo en términos de concepciones de los alumnos.
En Didáctica de la Matemática el término concepción se utiliza a fin de establecer una distinción entre el objeto matemático, que es único[3], y las diversas significaciones que le pueden ser asociadas por los alumnos (Artigue, M., 1984).

Las concepciones son conocimientos elaborados por los alumnos que tuvieron su campo de eficacia, pero que en otras situaciones resultan inadecuados. Por ejemplo, la mencionada concepción es válida en el caso que se trate de dos figuras qué sólo tengan un punto en común.

Respecto de las Magnitudes, errores tales como considerar que si el perímetro se duplica el área se duplica también pueden interpretarse en términos de concepciones. En este caso, se trataría de la concepción: "Perímetro y área varían en la misma proporción".

[3] Nota de los autores del módulo: La autora se refiere al significado del objeto matemático en la disciplina

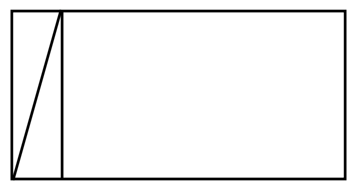
ACTIVIDAD 6

(ítem correspondiente a la evaluación de proceso)

PROBLEMA PROPUESTO A LOS ALUMNOS

Calculen el área de un trapecio isósceles sabiendo que su perímetro es 24 cm ; su base mayor mide 10 cm ; y su base menor 8 cm”

El error predominante fue el siguiente:
A partir del trapecio isósceles construyeron un rectángulo como se indica:



Luego, calcularon la altura de la siguiente manera:
P=24 cm
P=2 h+18 cm
h=3 cm
La respuesta fue: el área es 27 cm^2.

Le solicitamos que vincule las respuestas de los alumnos con los análisis anteriores.

Errores que provienen de expectativas docente-alumno en relación con una determinada tarea (contrato didáctico)

Como comentamos en el apartado Evaluación y contrato didáctico, estos errores dan cuenta de una forma de comportamiento de los alumnos frente a determinadas tareas, sobre la base de reglas que han construido con relación a *“lo que hay que hacer frente a una actividad matemática”*

Tratamiento del error

Una vez analizados los errores y formuladas las hipótesis sobre sus posibles orígenes es necesario verificarlo. Por una parte debemos tener en cuenta que un mismo error puede obedecer a distintas causas. Por otra, que una incorrecta interpretación del origen de un error pueden llevar al docente al planteo de actividades superadoras que no sean pertinentes, por ejemplo, que involucren procedimientos no utilizados por los alumnos, lo que constituiría un agravante. Se hace necesario, entonces, obtener diferentes informaciones sobre los errores en estudio.

Ahora bien, los errores a trabajar se apoyan en representaciones de los alumnos (sobre el conocimiento matemático o sobre la actividad matemática) construidas por ellos, y, por lo tanto, profundamente arraigadas. Esto hace que no puedan ser superadas por medio de la resolución de una actividad circunstancial o de varias actividades similares. En tal sentido, debemos pensar en **dispositivos de remediación.** Y hablamos de **re-mediación** no en el sentido de remedio sino de prácticas que implican nuevas mediaciones entre el alumno y el saber:

“*Llamaremos remediación a todo acto de enseñanza cuyo objetivo es permitir que el alumno se apropie de los conocimientos (saber, saber hacer, saber ser, competencias metodológicas) después que una primera enseñanza no le ha permitido hacerlo en la forma esperada”*. (Charnay, R. 1991)[4].

Antes de elaborar dispositivos de remediación cabe preguntarse: ¿El estudio de nuevas nociones ayudará a los alumnos a corregir los errores en cuestión?

De ser así, no siempre es necesario pensar en remediarlos en forma inmediata. Eso ocurre, por ejemplo, en el caso de la concepción de perpendicular como recta vertical. Si durante el año en curso se debe trabajar con propiedades de los rectángulos, es posible remediar los errores que los alumnos cometen en el reconocimiento y trazado de perpendiculares.

También cabe preguntarse: ¿Cuántos alumnos cometen ese error?
Es importante tener en cuenta que si el grupo es pequeño, no debemos caer en la tentación de pasarlo por alto.

[4] Las instancias de remediación que se incluyen se adaptaron de las propuestas por Rolan Charnay (1991)

Una vez decidido que los errores deben ser objeto de trabajo específico y a sus posibles orígenes, es posible considerar algunas estrategias para su tratamiento.

Tratamiento de errores que nos informan sobre la manera de conocer de los alumnos

En este caso resulta importante lograr que el alumno tome conciencia de la insuficiencia de sus concepciones, sea porque conducen a errores, sea porque implican métodos lentos o complicados. Sin embargo, esto no siempre es simple de lograr. A continuación describimos, algunas posibles maneras de intentarlo:

- Mantener una conversación con el alumno para que explique su resolución. Tal explicación puede permitirle identificar los procesos que ha implementado y que lo han conducido a soluciones incorrectas.
- Tener una conversación con el alumno de modo tal que pueda dar lugar a un un conflicto entre una anticipación realizada por él y el correspondiente resultado producido.
- Organizar grupos de discusión entre pares a fin de poner de relieve las contradicciones entre las concepciones y las respuestas de los alumnos. Es decir, favorecer interacciones entre los mismos a fin de que cada uno de ellos pueda explicitar las razones por las cuales piensa que su resultado es correcto. Sin embargo, debe considerase el riesgo de convertir el conflicto en uno de tipo social (yo tengo razón porque tengo mejor nota, etc.,), por lo que resulta necesario que el docente organice los grupos de trabajo de acuerdo a las características de los alumnos y puntualizando que los intercambios deben estar centrados sobre los aspectos matemáticos.
- Proponer problemas que puedan permitir al alumno reinvertir sus concepciones y tomar conciencia, a partir de los errores que provocan, de la insuficiencia de las mismas.
- Apelar a que comparen y confronten con portadores de información que hayan podido realizar previamente por ejemplo, registrando en la carpeta un punteo de los aspectos importantes a retener de un determinado contenido.

Tratamiento de errores que nos informan sobre las interpretaciones que hacen los alumnos de sus tareas

Una posible estrategia es la propuesta de actividades en las que los alumnos pongan en juego las reglas que les han llevado a cometer los errores, de modo tal que puedan darse cuenta que esas reglas pueden llevar a respuestas incorrectas.

ACTIVIDAD 7

(para revisar en el encuentro presencial)

Seleccione uno de los errores de los que hemos comentado y diseñe una posible instancia de remediación. Fundamente su propuesta.

A modo de cierre

ACTIVIDAD 8

(ítem correspondiente a la evaluación de proceso)

Vuelva sobre la **Actividad 11** de la Unidad 1 y sobre la **Actividad 6** de la Unidad 2, y de ser necesario, realice una corrección de las mismas. Elabore un breve informe que incluya la fundamentación de sus opciones.

Bibliografía

Bibliografía complementaria para los docentes de ESB que asistan a la capacitación

Berthelot, R y Salin, M.H. *La enseñanza de la geometría en la escuela primaria.* Laboratorio de Didáctica de las Ciencias y Técnicas. Universidad Bordeaux I-IUFM de Aquitania. Francia. En PTFD Selección bibliográfica III *Enseñanza de la Matemática. Tema: Geometria* (1995) Dirección Nacional de Gestión de Programas y Proyectos. Programa de Formación y Capacitación Docente. Ministerio de Cultura y Educación. República Argentina, 1994.

CGCyE, Diseño Curricular para la Educación Secundaria Básica. Matemática. 1º año. La Plata, DGCyE, 2006.

Camilloni, A., La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo. Buenos Aires, Paidós, 1998.

Charnay, R., *Del análisis de los errores de los alumnos a los dispositivos de remediación: algunas pistas*. Traducción mimeo. Programa de Transformación para la Formación docente. Dirección Nacional de Programas y Proyectos. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación., 1991.

Crippa, A . y Gusner,G., "La evaluación de los aprendizajes", en Hanfling, M. y otros. *Matemática. Temas de su Didáctica*. Buenos Aires, Prociencia – Conicet, 1998.

Crippa, A., "Evaluación del y para el aprendizaje", en Chemello G. y otros: *Estrategias de enseñanza de la Matemática.* Buenos Aires, Universidad Nacional de Quilmes, 2000.

Itzcovich, H., *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires, Serie Formación Docente. Libros del Zorzal, 2005.

Charlot, B., "La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas". Conferencia dictada en Cannes, 1986.

CGCyE, Marco General para la Educación Secundaria en la Provincia de Buenos Aires (2006).La Plata, DGCyE, 2006.

Napp, C., Novembre, A., Sadovsky P., y Sessa, C., "La Formación de los Alumnos Como Estudiantes. Estudiar Matemática", un documento elaborado dentro de la serie "Apoyo a los Alumnos de Primer Año en los Inicios del Nivel Medio". Editado por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Secretaría de Educación – Dirección General de Planeamiento, 2000.

http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/media.php#matematica

Sadovsky, P.; Parra, C.; Itzcovich, H. y Broitman, C., "La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo, Documento de trabajo N° 5. Matemática". Dirección de Currícula, Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 1998.

Sadovsky, P., *Enseñar Matemática Hoy*. Buenos Aires, Serie Formación Docente. Libros del Zorzal, 2005.

Sessa, C.; Barallobres, G.; Fioriti, G. e Itzcovich, H., Documento para la Enseñanza de la Geometría en los Primeros Años de la enseñanza media. Dirección de Currícula., Secretaría de Educación. GCBA (en proceso de edición).

Sessa, C. y Kulesz, L., *Problemas de la enseñanza en el área de matemática en el Tercer Ciclo de la EGB.* La Plata, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2001.

Bibliografía complementaria para los docentes capacitadotes

Además de la bibliografía complementaria propuesta para los docentes participantes, se propone el material bibliográfico que se detalla a continuación:

Alen, B., "Los procesos evaluativos en la capacitación docente", en *Programa Provincial de Formación Continua*. La Plata, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2000.

Bodín, A., « L´évaluation du savoir matehématiques. Questions et méthodes ». En *Recherches en didactiques de mathématiques, Volumen 17/1*. Francia, La Pensée Sauvage, 1997.

Charnay, R., *Pourquoi des mathématiques à l´école* Capítulos 6 y 7. París, ESF éditeur, 1996.

Fregona, D., «Diferentes dominios de declaración sobre las figuras», un documento editado por la Universidad Nacional de Córdoba, 1998.

Lombardi, G., «La Formación docente continua. Apuntes para la transición». La Plata, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 1999.

Lombardi, G., Alen, B. y otros, «Aportes para una didáctica de la capacitación docente» En *Programa Provincial de Formación Continua*». La Plata, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2001.

Panizza, M. y Sadovsky, P, Problemas didácticos a propósito de la capacitación docente en el área de matemática en *Propuesta Educativa*. vol. 12, Buenos Aires, Flacso, 1995.

Anexo 1

La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas

B.Charlot, conferencia dictada en Cannes, marzo 1986

"¿Qué es hacer matemáticas?
Para cualquiera que enseña cotidianamente matemáticas, esta pregunta puede parecer un exceso, o incluso un juego casi gratuito y sin gran interés. Dicho de otro modo, muchos profesores de matemáticas consideran esta pregunta como un asunto de la filosofía con el que es mejor no meterse. Hace veinte años que las reformas en la enseñanza de las matemáticas se han sucedido a un ritmo tal, que muchos profesores ya no saben qué se espera de ellos y llegan a preguntarse: ¿qué es enseñar matemáticas? Y finalmente ¿qué son las matemáticas? Quisiera proponer a este respecto, algunas pistas y señalar la importancia de comprender la epistemología – teoría del conocimiento, de su objeto y de sus métodos- implícita propia a toda práctica de la enseñanza de la matemática.

[…]

¿Qué es estudiar matemáticas? Mi respuesta global será que estudiar matemáticas es efectivamente HACERLAS, en el sentido propio del término, construirlas, fabricarlas, producirlas, ya sea en la historia del pensamiento humano o en el aprendizaje individual. No se trata de hacer que los alumnos reinventen las matemáticas que ya existen sino de comprometerlos en un proceso de producción matemática donde la actividad que ellos desarrollen tenga el mismo sentido que el de los matemáticos que forjaron los conceptos matemáticos nuevos.

Esta idea que sostiene que estudiar matemáticas, es HACER matemáticas, no es la más predominante en el universo escolar actual. La idea más corriente es aquella que postula que las matemáticas no tienen que ser producidas sino descubiertas. Es decir que los entes matemáticos ya existen en alguna parte, en el cielo de las Ideas. A partir de allí, el papel del matemático no es el de crear o inventar dichos entes sino de develar las verdades matemáticas existentes pero aún desconocidas. Desde esta misma concepción, las verdades matemáticas sólo pueden ser enunciadas gracias a la labor de los matemáticos, pero ellas son lo que son, dadas desde siempre, independientemente de la labor de los matemáticos. La enseñanza clásica de las matemáticas se basa en una epistemología y una ontología platónica que las matemáticas modernas aún mantienen: las Ideas matemáticas tienen una realidad propia.

El matemático René Thom no vacila en afirmar explícitamente que "la hipótesis de ideas platónicas que informan el universo es, a pesar de las apariencias, la más natural y, filosóficamente la más económica."
Una vez develada, la verdad matemática es expuesta a la mirada de quien sabe mirar suficientemente alto en el cielo de las Ideas. El papel del profesor consiste entonces en hacer que al alumno comparta esa visión a la que él ya accedió, y tornear el espíritu del alumno – "el ojo del alma", decía Platón- hacia el mundo matemático. Desde esta concepción, la verdad matemática le es dada a aquel que sabe ver, a aquel que tiene suficiente poder de abstracción.

El vocabulario pedagógico cotidiano que sigue siendo muy platónico, contiene constantemente esta metáfora de la mirada, de la visión, de la luz. Como dicen los alumnos, "yo veo" o "yo no veo", "me da justo" o "no me da justo", y en materia de matemáticas, no hay discusión, ni duda, o se da en el blanco o se está fuera de foco.

El vocabulario de los profesores, aunque es más rico, abunda en frases del mismo tipo. Ciertos alumnos son unas lumbreras, son brillantes, son unas luces, sacan las cosas a primera vista. Otros, lamentablemente, tienen orejeras, son ciegos, para

ellos todo es oscuro. Existen, en suma, los alumnos de cien watts y alumnos de cuarenta watts y nada tiene que ver el profesor en esto que no ha hecho más que dar su curso lo más "claramente" posible.

Sobre esta metáfora de la mirada se inscriben dos discursos interpretativos. Por un lado, la interpretación biológica que hoy se adorna de argumentos con pretensiones genéticas pero retoma de hecho el discurso sobre la inteligencia que tenía Platón hace veinticinco siglos: las matemáticas están dadas a quienes tienen un don, una capacidad de abstracción suficiente para percibir los contenidos conceptuales que les son propuestos - lo que la frenología llamaba hace casi un siglo y medio, "la joroba de los matemáticos". La segunda interpretación propuesta por la sociología de la educación, explica que algunos niños padecen de discapacidades socio-culturales, que carecen del capital cultural necesario para manejar un lenguaje abstracto y acceder así al universo matemático.

Estas dos tesis, una biogenética y la otra socio-cultural, son muy diferentes pero parten de un postulado común: los conceptos, los conocimientos, las culturas están consideradas como dadas y se transmiten a los herederos bajo la forma de don natural o capital socio-cultural.

A esta idea de una matemática dada, bajo una u otra forma, contrapongo la idea de una matemática construida, diría incluso, utilizando de una manera un poco provocativa el vocabulario de la técnica, una matemática fabricada. La actividad matemática no es mirar y descubrir, es crear, producir, fabricar. Los conceptos matemáticos no son un bien cultural trasmitido hereditariamente como un don o socialmente como un capital, sino el resultado de un trabajo del pensamiento, el trabajo de los matemáticos a través de la historia, el del niño a través de su aprendizaje. El Don y el Capital de un lado, el Trabajo del otro: empleo estos términos intencionalmente para que se pueda comprender mejor cuál es el problema de fondo planteado por la democratización de la enseñanza de la matemática. Esta democratización implica una ruptura que no recurre al ámbito de las aptitudes naturales o del entorno socio- cultural en un sentido vago del término, sino que es una ruptura social en el seno de las prácticas mismas de enseñanza. Hacer matemática no consiste en una actividad que permita a un pequeño grupo de elegidos por la naturaleza o por la cultura, el acceso a un mundo muy particular por su abstracción. Hacer matemáticas, es un trabajo del pensamiento, que construye los conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver problemas nuevos, que generaliza y unifica poco a poco los conceptos en los universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y se reestructuran sin cesar. Democratizar la enseñanza de la matemática supone en principio que se rompa con una concepción elitista de un mundo abstracto que existiría por sí mismo y que sólo sería accesible a algunos y que se piense en cambio, la actividad matemática como un trabajo cuyo dominio sea accesible a todos mediante el respeto de ciertas reglas.

Son dichas reglas, es decir las técnicas pedagógicas las que permiten al alumno conducir el trabajo de su pensamiento matemático y que yo querría ahora explicitar brevemente".

Anexo 2

Extracto del Capítulo 1 del libro Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Patricia Sadovsky. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

Nuestra visión de la matemática

Nos ubicamos en una perspectiva según la cual la **matemática es un producto cultural y social.**

Cultural, porque sus producciones están permeadas en cada momento por las concepciones de la **sociedad** en la que emergen, y condicionan aquello que la **comunidad de matemáticos** concibe en cada momento como **posible y como relevante.** El análisis histórico es rico en episodios al respecto. Por ejemplo, la civilización griega del período clásico supuso que los hechos de la naturaleza obedecen a un orden que puede ser conocido a través de la Matemática (Kline, M; 1985). En particular, para los pitagóricos todos los objetos estaban hechos de partículas elementales de materia o "unidades de existencia" combinadas con las distintas figuras geométricas. El número total de unidades representaba el objeto material. El número era la materia y la forma del universo. Esto permite comprender por qué le atribuían a los números formas geométricas y por qué el estudio de la aritmética se centraba en las propiedades de estos "tipos de números" (triangulares, cuadrados, etc.).[1]

La matemática es también un **producto social,** porque es producto de la interacción entre personas que se reconocen como pertenecientes a una misma comunidad. Las respuestas que plantean unos, dan lugar a **nuevos problemas que**

[1] Ver Carmen Sessa (2005): Iniciación al Estudio didáctico del Álgebra, de esta misma colección.

visualizan otros, las demostraciones que se producen se **validan según las reglas** que se aceptan en cierto momento en la comunidad matemática. Son reglas que van se van transformando en función de los conocimientos y de las herramientas disponibles, lo cual lleva a pensar que la idea misma de rigor matemático, cambia con el tiempo.

La génesis escolar del trabajo matemático

Dado que es la actividad matemática en tanto actividad de producción la que nos interesa "producir" –que se produzca- en la escena del aula, tomar las ideas anteriores como referencia es para nosotros ineludible. Sin embargo pensar que "el asunto" de la clase es la actividad matemática – incluyendo los resultados de dicha actividad, por supuesto- no es una postura unánimemente compartida entre todas las personas involucradas en la educación matemática: hay quienes se centran en comunicar algunos "resultados" a la manera de discurso acabado, hay quienes hacen un recorte para la enseñanza que no toma al conjunto de la actividad matemática como referencia sino sólo una parte, y conciben la enseñanza como la comunicación de técnicas aisladas. Ni unos ni otros necesitan pensar en una génesis escolar que convoque a los alumnos a un trabajo de reconstrucción de ideas. Aunque la noción de génesis escolar se irá precisando a medida que avancemos en el desarrollo del libro, digamos por ahora que es necesario pensar en un proceso de producción en la clase que tenga en cuenta las condiciones de la institución escolar que son esencialmente diferentes de las que rigen la producción de saberes en la ciencia.

En primer lugar, los alumnos deberán elaborar conocimientos que – seguramente con rasgos diferentes- ya existen en la cultura. Las herramientas conceptuales que dispondrán para hacerlo serán diferentes de las que fueron utilizadas cuando esos conocimientos "ingresaron" en la comunidad científica de la "mano" de matemáticos profesionales[2]. En otros términos, un matemático productor "sabe" muy distinto que un alumno de la escuela concebido como "matemático", lo cual obliga a pensar qué elementos tendría un alumno para reconstruir una idea que fue elaborada con otras herramientas y desde otro marco conceptual. Por otro lado, muchos de los "objetos"

[2] En aras de resaltar las condiciones de funcionamiento del conocimiento escolar, estamos tal vez "simplificando" un poco las cosas: los conocimientos no "ingresan" un día determinado a la cultura ni tampoco lo hacen de la mano de "un" o "unos" matemáticos: se trata normalmente de procesos menos definidos. Pensamos sin embargo, esto no altera lo esencial de lo que queremos comunicar.

que se tratan en la clase de matemática de la escuela actual, hace varios siglos que "abandonaron" su refugio original en la comunidad matemática y circulan por la sociedad "común", lo cual ha modificado una y otra vez sus sentidos. Por ejemplo, durante el período griego las razones de números naturales no eran considerados números sino justamente razones –relaciones- en tanto que hoy, los niños nacen en una cultura en la que las razones de números naturales **son** números y su esfuerzo se concentra en adaptarse desde el vamos a este funcionamiento. Esto hace que la complejidad que supone concebir un cociente como un número, quede "oculta" en un funcionamiento naturalizado por la sociedad.

En segundo lugar, la escuela impone un modo de trabajo según el cual los saberes sólo pueden durar un cierto tiempo en la vida de la clase ya que luego hay que pasar a ocuparse de otros saberes, esto implica un condicionante fuerte a la hora de pensar en procesos de reconstrucción del conocimiento en la escuela ya que los tiempos de aprendizaje no se rigen por la lógica de los "trimestres" o "bimestres".

Digamos finalmente que el sistema a través del cual se acreditan los aprendizajes no siempre "calza bien" con los recorridos que es necesario transitar para involucrarse verdaderamente en un proceso de producción…

Es difícil describir la actividad matemática – aún desde la concepción global de pensarla como producto social y cultural- sin caer en reduccionismos de algún tipo. Cualquiera que haya estudiado matemática – es el caso de los profesores actuales o futuros- "tuvo" que resolver unos cuantos ejercicios y problemas como parte de su trabajo de estudiante. Seguramente habrá sorteado para ello complejidades muy diversas: en algunos casos habrá tenido que "replicar" las pautas dadas por un problema "tipo" correspondiente a una cierta teoría, en otros habrá pasado por momentos de incertidumbre – no saber qué hacer, no saber si se hizo bien - aún conociendo que el problema, por ser planteado como parte de las tareas de una cierta asignatura, requería de las herramientas tratadas en dicha asignatura. Algunos problemas habrán "mostrado" aspectos nuevos de una teoría, otros habrán servido para permitir la emergencia de una cierta técnica o para consolidarla; algunos habrán dado la posibilidad de explorar y ensayar poniendo en juego diversos conocimientos y otros habrán requerido de una herramienta sin la cual el problema no salía. Por otro lado, a través de un problema se pueden buscar resultados de muy diversa naturaleza: elementos de un cierto conjunto (números, matrices, vectores, funciones, etc.), construcciones, conjeturas, demostraciones, representaciones…Al revisar la propia trayectoria de estudio no es fácil establecer cuánto aportó cada una de estas situaciones a construir para uno mismo una representación acerca de qué es la matemática y cuáles son sus asuntos. Si analizamos en profundidad seguramente encontraremos que algunos problemas "abiertos" – esos que requieren tomar muchas decisiones y que generan un gran nivel de incertidumbre-, nos dejaron una huella importante porque nos permitieron acceder a una idea más o menos general mientras que otros pudieron haber sido buenas experiencias pero quedaron aisladas sin que sus resultados se hayan podido insertar en alguna organización teórica. Por eso frases muy acuñadas como "la matemática se ocupa de problemas" o "hay que dar problemas y no ejercicios" o "no hay que dar técnicas", aunque parcialmente dignas de ser consideradas, dicen poco acerca de cómo estructurar un proyecto de enseñanza.

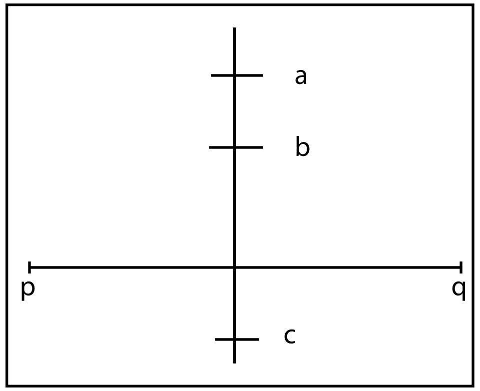
Anexo 3

PROBLEMAS

Los problemas que se presentan a continuación no se han formulado secuenciadamente.

1. Se ha trazado una recta perpendicular al segmento pq por su punto medio.
Sobre esta recta se han marcado tres puntos: a, b y c.[1]

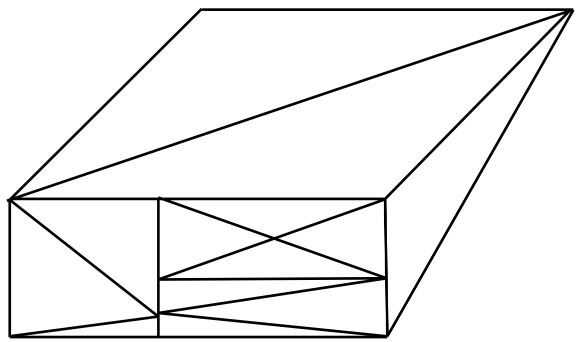
- Une el punto a con p y con q. ¿Qué triángulo quedó formado? ....
- Une el punto b con p y con q. ¿Qué triángulo quedó formado? ....
- Une el punto c con p y con q. ¿Qué triángulo quedó formado? ....



[1] Extraída de ***Matemática 4***. Buenos Aires, Santillana, 1988.

2. Pinta en la figura:

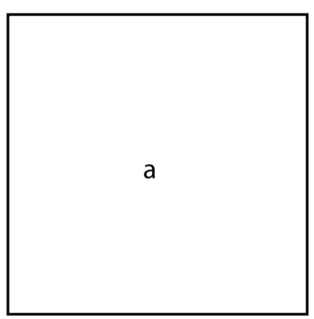
- Con verde, los triángulos que son a la vez escalenos y rectángulos.
- Con rojo, los triángulos que son a la vez isósceles y rectángulos.
- Con azul, los triángulos que son a la vez escalenos y obtusángulos.[2]



3. Imaginen que sobre este dibujo se pueden arrojar dardos.

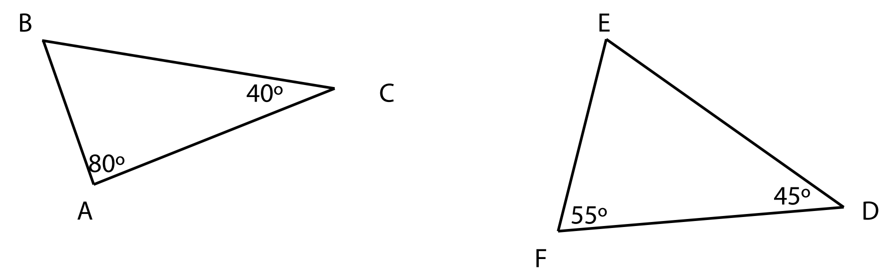
Si se tira un dardo y se acierta en la zona que está a menos de tres cm. del punto "a" se obtienen 1000 puntos, en cambio si se acierta en un punto que está exactamente a 3 cm de "a" se obtienen 8000 puntos.

Marquen la zona en la cual hay que acertar con el dardo para ganar 8000 y 1000 puntos.[3]

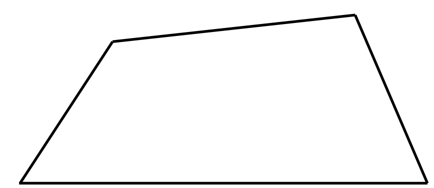


[2] Extraída de *Matemática 4*. Buenos Aires, Santillana, 1988.
[3] Extraída de El libro de la *Matemática 8*. Buenos Aires, Estrada, 1998.

4. A continuación, se representan dos triángulos escalenos.
En el segundo triángulo, ¿alguno de los ángulos mide igual que $\hat{A}$? ¿Cómo lo averiguaron?



5. Si la suma de las medidas de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º, ¿cuánto vale la suma de las medidas de los ángulos interiores de este cuadrilátero?



- Lo averiguado ¿es válido para cualquier cuadrilátero? ¿Por qué?

6. Dibujen un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y 6 cm.

- ¿Cuántos triángulos distintos pueden construir que verifiquen que sus lados midan 3 cm, 4cm y 6 cm?
- ¿Y cuántos triángulos pueden construir cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y 9 cm?[4]

7. Sea ABC un triángulo cualquiera. Trazar (si es posible) sobre la paralela a la recta AB que pasa por C, un punto D tal que el área del triángulo ABD sea mayor al área del triángulo ABC.[5]

[4] Extraída de El libro de la *Matemática 8*. Buenos Aires, Estrada, 1998.
[5] Extraída de Álgebra y Geometría, Publicaciones UNGS, 2001.

Anexo 4

Barallobres, G; Fioriti, G; Itzcovich, H. y Sessa, C. *Documento para la Enseñanza de la Geometría en los Primeros Años de la enseñanza media*. Dirección de Currícula., Secretaría de Educación. GCBA.

Aspectos didácticos de la enseñanza de la geometría

En principio, seleccionamos dos características de la geometría que jugarán un papel fundamental para comprender el tipo de interacciones y de dificultades que aparecen en el trabajo en el aula.

- Una primera característica de la geometría reside en las relaciones complejas que establece con el espacio físico que nos rodea.
- Una segunda característica concierne a la utilización en geometría de diferentes registros de expresión.

La relación con el espacio físico

La geometría se ha constituido en parte como una modelización del espacio físico. Se establece entonces una particular relación entre este espacio físico - con los datos que provienen de la percepción y la medición- y los objetos geométricos (figuras, cuerpos, etc.) que son objetos teóricos que obedecen a las reglas de la matemática (en su definición, sus reglas de "funcionamiento" y los modos de validación de sus propiedades).

Las figuras y los cuerpos son sin duda objetos geométricos considerados para la enseñanza, tanto en la escolaridad básica como en los primeros años de la escuela secundaria (es decir, toda la EGB).
Ya en el segundo ciclo, el documento de trabajo No. 5 sostiene la importancia de un trabajo con las figuras que avance más allá del uso de la percepción y la manipulación-como plegados y recortes- de los objetos.
Las actividades propuestas, centradas en la construcción de figuras, promueven la anticipación por parte de los alumnos, permitiendo el establecimiento de relaciones entre ciertos elementos de las figuras.

Para los primeros años de la secundaria (así como para el tercer ciclo de EGB), el trabajo con figuras y cuerpos continúa: se avanza en el establecimiento de relaciones más complejas (entre ellas, algunos teoremas clásicos de la geometría plana) así como en el desarrollo de la argumentación deductiva como forma de trabajo en geometría.
Estamos hablando de un proceso, y para ir lográndolo, las situaciones que se presenten a los alumnos deben cumplir ciertas características: permitir que los saberes geométricos aparezcan como instrumentos en la resolución de problemas que no puedan ser resueltos desde la percepción o desde la medición.

O sea, estamos pensando que un problema geométrico debe reunir ciertas características que detallamos a continuación:

- Para resolver el problema se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos.
- El problema pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado al cual las figuras-dibujos trazadas por este sujeto no hacen más que representar.
- La función que cumplen los dibujos en la resolución del problema no es la de permitir arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.
- La validación de la respuesta dada al problema- es decir la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de su repuesta- no se establece empíricamente sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos. Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras, producen nuevo conocimiento sobre los mismos.

Lo que estamos afirmando es que son **las características de los problemas planteados y una cierta organización de la clase** las que van a permitir este tipo de funcionamiento. En particular, la exigencia de una argumentación podría apoyarse en la insuficiencia de lo perceptivo y de la medición para llegar a la respuesta. Al respecto dice Dilma Fregona (en el Libro del Docente de "El libro de la Matemática 7" – Estrada) : La geometría no es sólo un conjunto de saberes sino un modo de relación con ciertos problemas.." y más adelante: "Si se quiere llevar al alumno al dominio de los conocimientos geométricos es necesario poner de relieve el obstáculo que representa la evidencia del dibujo".

Los diferentes registros en geometría

En geometría, para presentar una información o una representación mental, se ponen en juego tres tipos diferentes de registros:

- el **registro figurativo**, ligado al sistema perceptivo visual (representación gráfica de figuras y dibujos en general).
- el **registro del lenguaje natural**, con sus posibilidades de descripción y explicitación.
- el **registro del lenguaje simbólico** - propio de la matemática- que adquiere características particulares en geometría y que incluye el recurso de las fórmulas.

Prestaremos especial atención al registro figurativo. Las representaciones gráficas, o sea los dibujos sobre el papel, constituyen una **"parada intermedia"** entre los objetos teóricos y los objetos reales. El dibujo de un cuadrado sobre una hoja puede ser considerado tanto la representación gráfica del objeto geométrico "cuadrado" como la representación de un objeto cuadrado del espacio físico

La construcción de los objetos teóricos de la geometría se constituye tanto apoyándose en la percepción como oponiéndose a los datos de la evidencia. Este juego de acuerdos y desacuerdos parece ser propicio para su aprovechamiento didáctico.

Pero es necesario asumir en la enseñanza la dominación del registro figurativo en el trabajo de los estudiantes al comenzar este ciclo. En particular, en los casos de no congruencia entre la información dada en diferentes registros- por ejemplo: un texto con un dibujo que incluye más información -, es usual que los estudiantes consideren como más importante los datos provenientes del dibujo. Lograr una relación más cuidadosa con las figuras que incluya una toma de conciencia acerca de la no concordancia entre la información en diferentes registros es un objetivo al cual apuntar, no parece ser un punto de partida a exigir.

La representación gráfica de una figura que acompañe un texto del estilo:

- "Para todo triángulo..." o
- "Dado un cuadrilátero... "

Será siempre el dibujo de un triángulo o cuadrilátero particular, que necesariamente incluye más relaciones que las generales del enunciado. Parece haber todo un trabajo, del cuál la enseñanza se debe hacer cargo, para que los alumnos aprendan a tratar el dibujo como una figura general y no tengan en cuenta del mismo más que las relaciones dadas en el texto. En el capítulo 3 mostraremos un problema que por sus características colaboraría a hacer evolucionar el trabajo en este aspecto.

La representación gráfica de figuras en geometría es sin duda una herramienta poderosa en la resolución de problemas en general y, en particular, en la gestión de demostraciones. Al decir esto le asignamos a los dibujos el papel de **representación** de los objetos geométricos (que son objetos teóricos), destacando que hay todo un trabajo para hacer apuntando a lograr que los alumnos comprendan la diferencia entre el objeto y su representación.

Anexo 5

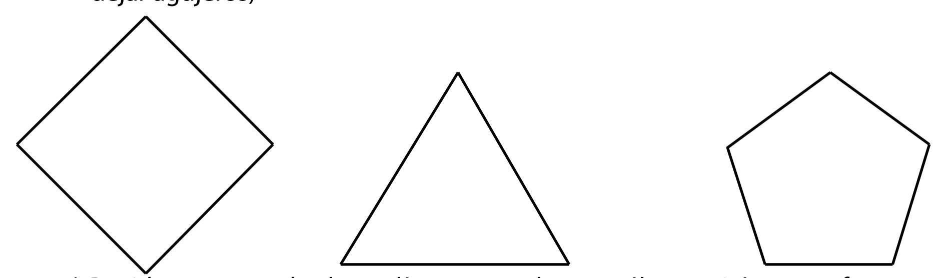
Sessa, C., *Acerca de la enseñanza de la Geometría*, en Matemática. Temas de su Didáctica, Prociencia, Conicet, 1996.

El embaldosado del plano por polígonos regulares. De lo empírico a lo argumentativo

CONSIGNA PARA LOS ALUMNOS:

1) Entre los siguientes polígonos regulares, elijan aquellos que sirvan como formas de baldosas para embaldosar un patio con baldosas iguales.

(Se pueden recortar las baldosas en los bordes del patio, pero no se permite dejar agujeros)



2) Decidan, entre todos los polígonos regulares, cuáles servirán como formas de baldosas y cuáles no.

3) Si se tienen baldosas iguales de forma triangular pero no equilátera ¿se podría embaldosar el patio? ¿Y con otras de forma cuadrilátera no cuadrada?

En los casos en que se pueda, realicen un dibujo del embaldosado.

Este problema puede plantearse en séptimo grado o primer año, cuando se tiene un conocimiento general sobre polígonos pero no se sabe aún cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados. También podría plantearse más adelante cuando se conozca ese resultado. A continuación analizaremos las dos variantes.

Análisis del problema del embaldosado del patio:[1]

Ante la primera pregunta es posible que los alumnos respondan, después de manipular en cada caso, varias copias del polígono dibujado.
(Si bien los alumnos podrían dibujarlos, se optó por presentar los polígonos ya dibujados para no poner el acento en los problemas de construcción.)
O sea, la primera parte admite una "validación" de la respuesta por simple verificación con objetos materiales: cada alumno puede cortar varios polígonos iguales al dado y entonces comprobar si puede o no puede cubrir el plano.

Pero no es éste, el tipo de validación al que estamos apuntando. Nos proponemos provocar un trabajo que no se restrinja a la manipulación con objetos materiales, sino que provoque la utilización de propiedades de los objetos geométricos para la producción de las respuestas. El objetivo a lograr es la construcción de "argumentaciones" como formas de "validación".

¿Por qué presentamos entonces la primera pregunta?
Para entender esto es necesario analizar el problema como totalidad.

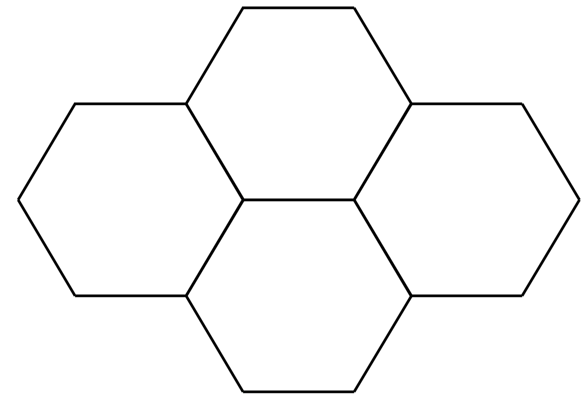
En general, los alumnos no tienen dificultades para contestar la primera pregunta y obtienen los siguientes resultados:

triángulo	→	sí
cuadrado	→	sí
pentágono	→	no

Con estas respuestas es difícil establecer una conjetura general sobre cuáles son todos los polígonos que sirven.

[1] Parte del análisis que aquí se detalla proviene de conversaciones con la Prof. Patricia Sadovsky, quien ha llevado a la práctica este problema con diferentes grupos de alumnos.

Es usual que los chicos prueben a continuación con el hexágono:
- o bien realizando un dibujo
como el siguiente



- o bien dibujando un hexágono, recortando varias copias y manipulando con ellos hasta encajarlos y obtener la configuración anterior.

Finalmente incorporarán el hexágono a la lista:

triángulo	→	sí
cuadrado	→	sí
pentágono	→	no
hexágono	→	sí

A esta altura del trabajo podría ocurrir que algunos chicos conjeturaran que "se puede embaldosar cuando el polígono tiene una cantidad par de lados", siendo el triángulo una excepción. La experiencia muestra que muchos chicos, guiados por este supuesto, prueban con el octógono, y llegan a sorprenderse de que no puedan embaldosar.

El trabajo experimental de inspeccionar polígono por polígono va abonando la conjetura de que todo dependerá del valor del ángulo interior de éste. Se toma conciencia de que lo que se necesita es que se reúnan 360° al colocar a continuación varias veces el ángulo del polígono.

De alguna manera, como producto de la actividad de los chicos, el problema se ha transformado. Ahora, podría enunciarse así:

¿Cuáles son los polígonos regulares cuyo ángulo interior es un divisor de 360º?

Quizás sea bueno pensar aquí en una "intervención docente" que organice de algún modo lo averiguado hasta el momento y colabore a fin de lograr que esta reformulación del problema resulte clara para todos los chicos:

Para avanzar en la respuesta, podemos suponer que los alumnos comenzarán revisando los casos que ya inspeccionaron:

Polígono	ángulo
Triángulo	60° (es divisor de 360°)
Cuadrado	90° (es divisor de 360°)
Pentágono	108° (no es divisor de 360°)
Hexágono	120° (es divisor de 360°)

Aquí el análisis del problema se bifurca en función de que los alumnos tengan disponible o no cuál es el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

- Si los alumnos no conocen el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados, es esperable que continúen con un trabajo experimental, analizando caso por caso los polígonos de mayor número de lados, pero probablemente cambie el tipo de experimentación, ya que se trata simplemente de calcular el valor del ángulo interior y verificar si es divisor de 360°.

Quizás intenten con el heptágono, para lo cual probablemente medirán sobre un dibujo y arribarán a algún valor cercano a 128°. ¡Con tres de estos polígonos ya se pasarán de un giro!

Como se necesitan al menos tres polígonos que concurran en un vértice, la situación empeorará aún más para polígonos de mayor cantidad de lados, ya que el valor de su ángulo interior también aumenta. Por lo tanto los únicos polígonos regulares que sirven son el triángulo, el cuadrado y el hexágono.

El desarrollo que recién describimos, será sin duda menos lineal en su realización efectiva por alumnos, pero siempre se ubicará en un espacio entre los datos experimentales y las argumentaciones.

En este momento debería ser admitido que el valor del ángulo aumenta a medida que crece la cantidad de lados, sin requerir argumentación.

La entrada en un tipo de funcionamiento racional sobre los objetos geométricos requiere de muchas "paradas intermedias" donde deben admitirse argumentaciones parciales y formalizaciones "a medias".

- Si los alumnos saben que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es 180°. (n-2), podrán partir de allí para terminar de responder. Pero entonces nuestro problema ya no estará planteado en el marco[9] geométrico, sino más bien en el marco numérico - algebraico.

El problema podría quedar planteado del siguiente modo:

¿Para qué valores de **n** $\in$ **N, 180º (n-2) / n** es un divisor de **360º?**

Anexo 6

La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición[1]

Apartado: El maestro, la enseñanza y el aprendizaje

a. Enseñar es plantear problemas a partir de los cuales sea posible reelaborar los contenidos escolares.
b. Enseñar es proveer toda la información necesaria para que los niños puedan avanzar en la reconstrucción del contenido sobre el cual están trabajando.
c. Enseñar es favorecer la discusión sobre los problemas que se han formulado, es brindar la oportunidad de coordinar diferentes puntos de vista, es orientar hacia la resolución de los problemas planteados.
d. Enseñar es alentar la formulación de conceptualizaciones necesarias para el progreso en el dominio de la lengua escrita,[2] es promover redefiniciones sucesivas, hasta alcanzar un conocimiento próximo al saber socialmente establecido.
e. Enseñar es promover que los niños se planteen nuevos problemas que no se hubieran planteado fuera de la escuela.

[1] Lerner, Delia, "La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición", en, Castorina, Ferreiro, Kohl y Lerner: ***Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate***. Buenos Aires, Paidós, 1996.
[2] Si bien la autora se refiere a la enseñanza de la lengua, sus reflexiones son válidas para la enseñanza de la matemática.

¿Cuáles son, entonces, las condiciones que favorecen una interacción productiva en los subgrupos? Aun cuando queda mucho por investigar en este sentido, los estudios realizados hasta el presente permiten establecer algunas condiciones que han mostrado ser fructíferas:

- En general, los grupos funcionan mejor cuando son suficientemente pequeños como para que la responsabilidad no se diluya, como para que cada uno de sus miembros se sienta muy comprometido con el trabajo conjunto. Por lo tanto, en la organización de la clase ocupa un lugar importante la agrupación de los niños por parejas. Sin embargo, ésta no es la única modalidad utilizada, coexiste con otras porque las formas de organización varían en función de la naturaleza de las actividades que se proponen y de los efectos que se aspira a obtener.
- Si se otorga a los niños un tiempo para pensar individualmente en el problema planteado antes de intercambiar con sus compañeros, se hace más probable lograr que todos los niños (y no sólo algunos) tengan algo para aportar a la discusión.
- Cuando los niños se están apropiando del sistema de escritura, los intercambios más enriquecedores se producen entre sujetos que están en niveles diferentes pero cercanos del proceso constructivo (Teberosky, 1982; Lerner y otros, 1982; Kauf:man y otros, 1982).

Esta conclusión es indudablemente válida para la primera etapa de la alfabetización y para las situaciones de escritura, pero no puede aplicarse directamente a otras etapas y situaciones. La dificultad obedece a diversas razones: en primer lugar, no se han definido "niveles de conceptualización" posteriores a la apropiación del sistema de escritura –quizá no existan, o quizás existan sólo en relación con aspectos muy puntuales como la construcción de la ortografía de la palabra o de la puntuación, pero no en relación con cuestiones tales como la coherencia y la cohesión del texto; en segundo lugar, los pasos que dan los niños como productores mientras se están apropiando de la alfabeticidad del sistema son mucho mejor conocidos que los que dan como lectores; por último, es necesario que la investigación didáctica estudie más rigurosamente cuáles son las condiciones que hacen posible generar interacciones productivas tanto en las situaciones de escritura posteriores a la apropiación del sistema como en las situaciones de lectura, de tal modo que sea posible formular conclusiones válidas para las actividades de lectura y escritura a lo largo de toda la escolaridad.
Por ahora, sólo es posible afirmar que las interacciones más fecundas se producen cuando los integrantes del grupo tienen suficientes conocimientos en común como para entenderse y suficientes discrepancias o diferencias de información como para poder confrontar sus ideas y enriquecerse mutuamente. Dado que esta afirmación es demasiado general para orientar efectivamente la constitución de los grupos en el aula, parece prudente formular la recomendación que enunciamos a continuación.

- Es conveniente que cada niño tenga oportunidad de interactuar con muchos otros, de que los subgrupos –lejos de quedar constituidos desde el primer día para todo el año escolar– sean variables y esta variación vaya permitiendo determinar quiénes son los niños que están en condiciones de cooperar mejor en cada período y para cada actividad.

Es necesario seguir explorando cómo trabajar didácticamente con la interacción entre pares, es necesario sobre todo estudiar cuáles son las intervenciones que hacen posible que la diversidad se constituya cada vez más claramente en un factor positivo para el avance de todos (y esto no es fácil, dado el profundo arraigo que tiene en la institución escolar el mito de la homogeneidad).
Ahora bien, está muy claro actualmente que el maestro desempeña un papel fundamental en la interacción entre pares. No sólo porque la hace posible y la coordina, sino porque sólo él puede reconocer cuáles son las interacciones que permitirán acercarse al saber –es decir, al conocimiento socialmente aceptado como válido– e ir orientando el proceso hacia aquello que los niños deben construir."

Anexo 7[1]

Clase de Matemática con alumnas y alumnos de 11 y 12 años

Cuadriláteros

En una clase anterior los chicos recordaron lo que habían aprendido de cuadriláteros. La maestra les pidió que dibujaran uno de cada uno de los que conocieran.
Ese día la maestra sugirió la posibilidad de agruparlos según tengan uno o dos pares de lados paralelos.
La clasificación quedó colgada en un afiche en el aula y en la carpeta de los chicos.

Maestra: Hoy vamos a seguir trabajando con los cuadriláteros. Vamos a trabajar en grupos. Ustedes cuatro y Martín van a formar un grupo. Camila, Natalí y ustedes van a formar otro grupo, Diego, Yamila, Florencia, Sebastián, ...

(La maestra arma 6 grupos: cinco de cinco integrantes y uno de seis)

M: Escuchen. ¿Podés parar de arrastrar la silla? Doy una indicación y arman los grupos.

Los grupos tienen que estar separados, no armen un grupo al lado del otro.
(Se corren las mesas, se organizan lentamente...)

[1] Adaptado del propuesto en la evaluación de Matemática del Postítulo Nuevas Alfabetizaciones, Escuela de Capactitación CePA, Secretaría de Educación de la Ciudad de Buenos Aires, año 2002

M: Guarden todo. En la mesa pueden dejar la cartuchera y todos los elementos de Geometría.
A cada grupo le voy a dar una figura dibujada, lo que ustedes tienen que hacer es enviarle un mensaje a otro grupo, para que el otro grupo pueda construir una figura como la que ustedes tienen.
En el mensaje pueden poner lo que quieran pero no puede haber ningún dibujo, es como si le estuvieran mandando un mensaje por teléfono.

(los chicos hacen comentarios entre ellos)

M: Esperen... Cada equipo está formado por dos grupos, la idea es que el mensaje que manden se entienda para que los otros puedan construir la figura. Ustedes, por ejemplo, juegan con aquel grupo, no pueden enviarle ningún dibujo, pero ustedes ganan si lo que ellos arman coincide con lo que tienen ustedes. ¿Entienden?
Este grupo le manda a aquel, éste a este otro y ustedes a éste.

La maestra reparte en tres de los grupos un papel donde hay dibujado un paralelogramo.
La maestra preparó tres paralelogramos de 7cm y 4cm cada uno de ellos con distintas medidas en sus ángulos.
Los alumnos comienzan a trabajar.

En un grupo **(A)** se produce el siguiente diálogo:
Leandro: Fijate cuánto miden los lados
Magalí: (ya había apoyado la regla) uno mide 7 cm, el otro 4 cm, el otro 7 cm y el otro 4 cm.
Leandro: Anotá que es un paralelogramo propiamente dicho[2] y que los lados miden 7, el otro 4, éste 7 y éste 4.
Martín: No... poné que un par de lados opuestos paralelos mide 7cm
Magalí: ¿Vale decir que es un paralelogramo?
Leandro: sí ponélo, lo que no vale es dibujar.

La maestra pasa por los grupos y pregunta si están listos los mensajes.

[13] En los mensajes los chicos escriben PPD o paralelogramo propiamente dicho porque en una clase anterior la maestra presentó un afiche con la una clasificación en trapecios y paralelogramos.

M: Cuando tengan el mensaje listo me lo dan a mí y yo se lo llevo al otro grupo, no vale pararse y no vale hablar con el otro grupo.

En otro grupo **(B)** ocurre lo siguiente:
Están discutiendo el mensaje, escribieron la medida de los lados
Diego: ...no tiene nada que ver, medís bien los lados.
Es un paralelogramo propiamente dicho estos tienen 7 y estos tienen 4.
Yamila: Sí pero si vos lo torcés...
Florencia: Sí tienen 7 y 4.
Yamila: Sí ya sé, pero si lo achatás me parece que no te queda igual y también tiene 7 y 4.
Sebastián está escribiendo en la hoja la medida de los lados y que es un paralelogramo.
Diego: ponéle que son 4 centímetros.
Yamila: No, pero lo que yo digo es que si lo achatás te queda distinto.
(El grupo no entiende lo que intenta explicar Yamila)
Diego: Te quedaría distinto si fuera un rombo, pero es un paralelogramo. Si fuera un rombo lo podés hacer más gordo...
(Yamila se queda callada y envían el mensaje)

Al recibir los mensajes:

Al recibir el mensaje del grupo A, los chicos directamente comienzan a dibujar. Utilizan la regla y construyen un paralelogramo.

Al recibir el mensaje del grupo B, hay discusión:
Luciana: Ah... es un paralelogramo, los lados miden 7 y 4.
(Comienzan a dibujarlo: Julián traza un lado de 7 y coloca la regla para trazar uno de 4 cm)
Julián: ...tienen que darnos las medidas de todos los ángulos porque podrían ser muchos paralelogramos.
Confusión en el grupo.
Julián: Sí, no ves que pueden ser otros.
(Julián dibuja varios paralelogramos en un papel)
Lucas: Seño, no se puede. Con estos datos no se puede.
M: Tienen que tratar de entender el mensaje...

Julián: Sí pero no nos dicen los ángulos.

M: (para toda la clase) Ah... me olvidaba, si en el mensaje que reciben no están todos los datos que necesitan, pueden escribirle una pregunta al otro grupo para que se las conteste.
Julián anota "¿Y los ángulos?" en la hoja del mensaje y M. se la devuelve al grupo B.
El grupo B responde: "Todos los ángulos son de 60º cada uno, midan de nuevo su figura"

Después de unos minutos, cuando todos los grupos receptores terminaron de construir su figura, la maestra les pide a todos que presten atención.

M: Bueno, paren de trabajar. Ahora vamos a ver qué fue lo que pasó. Yo voy a agarrar los dibujos que ustedes hicieron y los voy a superponer acá a la luz, con el original que tenía el grupo y vamos a ver si coinciden o no.

M toma el original de uno de los grupos y lo superpone con el que se construyó. El paralelogramo aparece "corrido."
M ¿Qué les parece?
Algunos chicos dicen que no se ve, la M pasa por los grupos con los dos dibujos superpuestos.
Hace lo mismo con los otros paralelogramos que tampoco coinciden.

M: Analicemos los mensajes a ver qué fue lo que pasó.

M escribe sólo dos de los mensajes en el pizarrón.

M: Escribo sólo estos dos mensajes, casi todos se parecen a éstos. El primero es el que recibió el grupo de Lucas, Luciana, Julián...
1) "Es un paralelogramo propiamente dicho. Un par de lados opuesto mide 7cm cada uno y otro par de lados opuestos miden 4 cm cada uno. ¿Y los ángulos? Todos los ángulos son de 60º cada uno. Midan de nuevo su figura."

M: El segundo mensaje es el que recibió el grupo de Laura, Malena, Pablo...
2) "Es un paralelogramo propiamente dicho, un par de lados mide 7 cm y el otro par mide 4 cm."

Los chicos hacen comentarios entre sí.
M: Veamos los mensajes
Algunos alumnos comentan que sus paralelogramos tenían esas medidas. Hay confusión.
Julieta: Algunos paralelogramos quedaron achatados, estaban como torcidos...
Federico: Sí estaban mal las medidas.
Julián: No, estaban mal los ángulos.
Santi: Nosotros dibujamos uno de 7 cm y otro de 4 cm como decía el mensaje.
Yamila: es que si los achatás te quedan distintos, no ves que te quedan más inclinados (indica con las manos un ángulo que se cierra y se abre)

M: A ver, miren los mensajes ¿qué tienen de distinto?
Varios alumnos: en uno pregunta la medida de los ángulos.
M: Julián ¿por qué preguntaron ustedes por la medida de los ángulos?
Julián: Porque te cambia el paralelogramo con otros ángulos.
M: ¿Cómo que te cambia el paralelogramo?
Julián: Sí, te queda más chato o más parado, pero los lados son iguales que antes.
M: ¿Alguien entiende lo que dice Julián?
Leandro: Claro, dice que si cambiás los ángulos, el paralelogramo te puede quedar más acostado, pero los lados no cambian.
M: No entiendo bien... ¿Alguien puede explicar de otra manera lo que dijo Leandro?
Yamila: Sí, que hay que saber la medida de todos los ángulos.
(La clase continúa, la maestra les pregunta si están seguros que deben transmitir la información de los ángulos, pide aclaraciones, insiste que no entiende... otros chicos explican que los ángulos pueden modificarse)

Bueno, vamos a anotar esto que discutimos hoy. ¿qué ponemos?
M: escribe en el pizarrón lo que los alumnos van diciendo desordenadamente: "para enviar el mensaje hay que saber la medida de los ángulos del paralelogramo."
M:Mañana vamos a volver a jugar, es importante que se acuerden lo que pasó hoy.

Anexo 8

Las siguientes ideas han sido extraídas de Napp, C. Novembre, A., Sadovsky P., y Sessa, C. (2000) "La Formación de los Alumnos Como Estudiantes. Estudiar Matemática", un documento elaborado dentro de la serie "Apoyo a los Alumnos de Primer Año en los Inicios del Nivel Medio"[1]. Editado por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Secretaría de Educación – Dirección General de Planeamiento.

http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/media.php#matematica

Fragmentos referidos a algunas de las estrategias incluidas en el apartado "Enseñar a estudiar matemática"

• **Libros y carpeta: instrumentos para el estudio**

…………..la carpeta es muchas veces el único elemento de estudio del que disponen los alumnos. Es por lo tanto fundamental que ellos aprendan a tomar apuntes para que la carpeta se convierta en un elemento realmente útil. Pero, para que esto suceda, hay que plantear actividades que les permitan valorar la función de la carpeta y mejorar los registros de lo que se realiza en clase.

• Supongamos que se plantea en la clase un debate acerca de la validez de una conjetura. En general, estas discusiones -a pesar de ser muy ricas- no figurarán en la carpeta. Para remediar esto se puede proponer a los alumnos que redacten cuáles son las posiciones, los argumentos principales expuestos durante el debate, una síntesis de lo ocurrido y una conclusión. Luego se puede hacer un trabajo en el conjunto de la clase para corregirlo y arribar a una versión común. Este tipo de actividad tiene por objetivo reflexionar acerca de cómo debe registrarse un episodio

[1] Le sugerimos que, de resultarle posible, complete la lectura del Documento.

de debate en una clase. Si no se aprende a tomar apuntes de las discusiones, la carpeta sólo contendrá anotaciones inconexas y desarticuladas. **Pensamos que la carpeta tiene que ser un instrumento de trabajo, y como tal debe ser utilizable, no descartable. Debe** ser el lugar donde **el alumno pueda buscar registros de lo que aprendió y cómo lo aprendió. Allí debe estar "la historia" de su aprendizaje.**

[…]

En cuanto al libro de texto, ¿cuál es el uso que se le da en la clase de matemática? En general se lo usa sólo para sacar ejercicios, ya que la información que está en el libro pocas veces se usa. La "teoría" la explica el profesor y del libro sólo se utilizan los ejercicios.

Nos preguntamos cómo puede convertirse en un instrumento más rico para el estudio.

• Una posibilidad es pedir a los alumnos que busquen en el libro definiciones de algún tema que se haya trabajado y analicen si coinciden o no con las dadas en clase. En caso de no coincidir, deberán profundizar sobre esas diferencias: ¿son sólo diferencias de lenguaje?, ¿se están definiendo, bajo el mismo nombre, conceptos diferentes?, ¿es una definición más general que la otra? De esta manera se estaría prestando especial atención a las distintas formulaciones de un concepto.

• Otra posibilidad consiste en pedir a los alumnos que analicen, para un tema que se haya estudiado, los subtítulos del correspondiente capítulo del libro para determinar si todos fueron trabajados en clase. Si hay distintos libros disponibles en la clase, se les puede pedir a los alumnos que los comparen en cuanto a los contenidos a propósito de determinado tema.

• Otra tarea muy productiva consiste en que los alumnos estudien algún tema del libro, sin contar con una explicación previa. Después se lo puede recuperar en la clase entre todos, resolviendo problemas de este tema, debatiendo algunos puntos, contestando preguntas preparadas por el profesor, o a través de clases especiales. O sea, el profesor puede programar una actividad en el aula que complemente el estudio previo que realizó el alumno fuera de la escuela. Esto posicionaría al alumno como motor y fuerza de arranque en el proceso de enseñanza y al docente colaborando en una segunda etapa del trabajo.

Actividad de evocación

Los alumnos suelen olvidarse de lo que se ha enseñado. "Eso no lo vimos" suele ser una frase habitual en la clase. "Si yo lo enseñé", piensa a su vez el docente mientras oscila entre la decepción, el enojo y la incomprensión... Los alumnos se olvidan. Esto es una realidad que obedece - como siempre- a múltiples razones.

La reflexión sobre lo hecho es una manera de trabajar sobre este olvido. Hay muchas maneras de reflexionar. En este momento nos ocuparemos de una de ellas: la evocación.

Evocar un problema es evocar las acciones sin realizarlas. Intentando decir colectivamente lo que sucedió, qué problema fue tratado, los alumnos son llevados a repensar el problema y los procedimientos de resolución utilizados. Esta actividad tiene una significación diferente a la de resolver: los alumnos tienen que pensar en el sentido del problema, más que en los detalles de su resolución. El proceso mental que se requiere para hablar de lo que se hizo es mucho más complejo que el que se requiere sólo para "hacer". Los alumnos deben describir los problemas resueltos -indicando su enunciado, explicándolo, diciendo cuáles eran los datos y cuál la pregunta- pero además deben relatar los distintos procedimientos de resolución utilizados en clase. Para garantizar que todos los alumnos participen del momento de evocación, el docente puede solicitarles que la preparen, o sea que comiencen con este trabajo de recuperación antes de la clase.

Para los estudiantes que entendieron, evocar significa una oportunidad de revisitar los conceptos con otra perspectiva, no ya como resolutores sino como personas que reflexionan sobre los mismos. Los alumnos que no entendieron encuentran otra oportunidad y una razón para hacerlo puesto que deberán hablar de lo sucedido y describirlo sin poder actuar. Puede ocurrir que para algunos alumnos sea necesario volver a resolver, pero ahora lo harán desde otra perspectiva: tienen que actuar no sólo para hallar la solución del problema sino para poder hablar de ella.

[…]

Este momento de evocación tiene varias funciones: unir sentidos diferentes de una misma noción vista en contextos diferentes o articular diferentes conceptos, hacer que evolucionen las formulaciones de los alumnos y tiene, sobre todo, la función de descontextualización y de anclaje de los saberes nuevos en los saberes ya adquiridos con la institución de diversas relaciones. Esta última es una función sumamente importante, ya que los alumnos con dificultades no confrontan, en general, lo nuevo con los conocimientos anteriores. Así, las experiencias parecen yuxtaponerse sin que haya interacción entre lo antiguo y lo nuevo. Cada experiencia es nueva. Se genera así un proceso en el cual los conocimientos anteriores no tienen ocasión de estabilizarse, los conocimientos nuevos no pueden arraigarse, tienen pocas posibilidades de ser retenidos y el alumno no puede confiar en lo que sabe.

Libro de temas

Es habitual que al finalizar la clase los alumnos no puedan identificar qué se hizo ni qué es lo que deben retener de las actividades que se llevaron a cabo. Muchas veces, esto sucede porque los alumnos creen que el objeto de enseñanza es el ejercicio puntual que resolvieron y no reconocen un tema a propósito del cual se hicieron algunos problemas. Esto es muy claro en los alumnos flojos que tienen muchas dificultades en la descontextualización de los conocimientos.

[…]

• Por ejemplo, para contribuir a la identificación de lo que se trató en cada clase puede plantearse que, por grupos, se haga una pequeña crónica de lo que ocurrido y se guarde un registro de lo que se aprendió. Se puede hacer de forma rotativa, a cargo de un alumno o un grupo cada vez.

La crónica no debe sólo incluir el título de lo que se está estudiando, sino que también se debe identificar con qué tipos de problemas se trabajó, cuáles fueron los errores más comunes que se cometieron y cuáles son los elementos que hay que retener. Por supuesto, la elaboración de la crónica requiere de un aprendizaje y no es esperable que los alumnos la elaboren de manera completa las primeras veces.

La idea es que cada clase comience con la lectura de la crónica de la clase anterior para reubicarse en el tema en el que se está trabajando. La lectura de la crónica funcionará como una retroalimentación acerca de su eficacia, ya que los alumnos que no participaron de su confección podrán opinar acerca de si es completa, clara

y pertinente. De esta manera se logra que toda la clase comience desde el mismo punto de partida.

Si es posible, sería importante que todo el curso tenga una copia de la crónica de cada día en su carpeta. Esto, junto con los apuntes que cada uno haya podido tomar, permitiría acceder a un registro de una clase completa. Puede suceder que algún alumno, a partir de la crónica, se dé cuenta de que sus apuntes de la clase anterior no eran lo suficientemente ajustados y tenga de esta manera otra oportunidad para completarlos. Debería ser también un material de mucha utilidad para los alumnos que estuvieron ausentes.

Glosario de términos matemáticos

Una parte de la carpeta puede dedicarse a hacer un glosario de términos matemáticos. Esta herramienta favorece la independencia de los alumnos con el profesor: si ellos saben que todo concepto está en su glosario, entonces frente a una duda podrán remitirse al glosario rompiendo de este modo con la figura del profesor como única fuente de información y de confirmación en la clase; más aún, frente al "no lo vimos" respecto de un determinado tema, se irá haciendo costumbre en la clase mirar el glosario, una suerte de memoria colectiva como ayuda a la memoria individual.

[…]

Dado que la escuela propone aproximaciones sucesivas a un concepto, no es razonable pensar que las cosas se definen de una vez y para siempre, de manera definitiva. Los profesores sabemos que muchos de los conceptos que se enseñan volverán a enseñarse más adelante, lo que producirá naturalmente una modificación de las conceptualizaciones de los alumnos.

[…]

Repasos

Repasar, revisitar las ideas una y otra vez, es una actividad inherente al proyecto de aprender. Ahora bien, como es en general el profesor quien lo organiza, él es el que decide cuáles son los contenidos a ser repasados, quitando a los alumnos toda responsabilidad. Creemos que el repaso debe ser preparado por los alumnos en sus casas y luego discutido en clase con una participación activa del profesor. También, de esta manera, el profesor tendrá datos muy importantes acerca de qué es lo que los alumnos piensan que es importante y debe ser repasado. A partir de estos datos el profesor estará en mejores condiciones de planificar un cierre del tema.

Señalaremos a continuación distintas instancias de repaso.

a) La elaboración de machetes

Los alumnos deberían tomar parte activa en el repaso antes de una evaluación. Una manera de lograr esto es pedirles que, en sus casas, preparen un "machete" lo más detallado posible que incluya no sólo las fórmulas sino todas las aclaraciones necesarias para evitar errores comunes o que ellos han cometido. El machete puede incluir ejemplos con aclaraciones y carteles de precaución. Es un trabajo interesante porque los alumnos tienen que reflexionar acerca de cuáles son los aspectos más importantes para recordar y cuáles son los errores comunes.

En clase algún grupo expone su "machete", mientras que el resto de los alumnos puede realizar aportes referidos a los aspectos que no fueron tenidos en cuenta por ese machete en particular. La idea es que, entre todos, obtengan un producto lo más completo posible que sirva como resumen del tema que se está repasando.

De esta manera, se está enseñando a los alumnos a organizar un repaso, que no necesariamente debe realizarse antes de una prueba, sino que puede hacerse en cualquier momento del aprendizaje e irse completando.

b) La preparación de un examen

Una actividad interesante es que los alumnos formulen o caractericen qué tipos de problemáticas se resolvieron alrededor de los conceptos que se estuvieron trabajando en un determinado momento, cuáles son las diferencias y similitudes entre ellos, es decir qué sentidos del objeto matemático se ponen en juego en cada uno.

Otro trabajo que puede realizarse en esta dirección es que los alumnos propongan un modelo de examen. Eso los llevaría a revisar todo lo que se vio y jerarquizar lo que les parece más importante para preguntar, lo que ellos crean que no se puede pasar por alto en cada tema.

[...]

c) La explicación a un amigo

Luego de ver un tema y con el objetivo de hacer un balance se puede dar a los alumnos una lista de problemas y la siguiente consigna:

- "Imagínense que un amigo de ustedes no entiende estos problemas y les pide ayuda. Pero, debido a incompatibilidades de horarios, no se pueden reunir y ustedes deben explicárselos por escrito. Por supuesto, el escrito no debe sólo contener la resolución de los ejercicios, sino que tiene que incluir explicaciones, consejos, ayudas, relaciones entre los distintos conceptos que se involucran, indicar qué tiene cada problema de general, etc. Es decir, que todo lo que este amigo necesite para estudiar tiene que estar escrito."

[...]

d) ¿Cómo se resuelve?

Otra tarea interesante consiste en dar una lista de problemas y pedir al alumno que diga cómo se puede resolver cada uno, pero sin hacerlo. Aquí la cuestión fundamental es que el alumno haga una anticipación de si podrá o no obtener la respuesta a un problema a partir de una cierta estrategia de resolución, sin desplegarla realmente.

Un punto importante es que no es necesario "prohibir" a los alumnos que resuelvan los ejercicios porque, por un lado, la consigna de la tarea no implica hallar la solución de los problemas y, por el otro, si la lista de problemas es larga, va a llegar un momento en que los alumnos buscarán predecir, anticipar.

[…]

e) Acerca de la corrección de las pruebas

¿Qué se hace con las pruebas? ¿Qué papel debería jugar la corrección y para qué sirve? Pensamos que la corrección de una prueba es un momento muy importante del aprendizaje. ¿Por qué? Porque los docentes nos encontramos en un buen momento para provocar una reflexión y un debate, ya que los alumnos acaban de "estudiar" y a ellos, en general, les interesa saber cómo les fue y cuáles fueron sus errores. Además, si se planea tomar un recuperatorio, es necesario que antes se hayan revisado los conceptos y los errores. Si no se hace este trabajo, entonces es probable que los alumnos vuelvan a cometer los mismos errores.

[…]

Anexo 9[1]

Una secuencia didáctica acerca de áreas de superficies planas: la distinción entre área y perímetro

Hemos elegido analizar parte de una investigación de Régine Douady y de Marie-Jeanne Perrin sobre áreas de superficies planas[2], experimentada en clases de alumnos de 9 a 11 años en Francia.

Las hipótesis sobre las que se basó este equipo para la construcción de la secuencia pertenecen a otra línea de investigación en Didáctica de la Matemática, que sostiene que:

- Los conceptos se construyen a través de las acciones y toman sentido gracias a los problemas que permiten resolver. La diversidad de problemas contribuye a enriquecer el concepto.
- Un nuevo concepto se construye en relación a los conocimientos ya adquiridos, sea para ampliarlos y generalizarlos, sea para cuestionarlos y construir otros nuevos mejor adaptados al problema propuesto.
- Un problema hace en general intervenir varios conceptos. Cada concepto toma su sentido en las relaciones que establece con los otros implicados en el problema.

[1] El siguiente fragmento ha sido Extraído de Machiunas V. (2000), "La enseñanza de la Medida". En Chemmello, G. (coord), *Estrategias de la Enseñanza de la Matemática*.
[2] Douady, R. Perrin, M-J. Investigaciones en didáctica de matemáticas: Áreas de superficies planas en CM y 6eme. En Hacer escuela. Revista de educación de la Escuela Mundo Nuevo, Año 9 Nº 9

- Esta diversidad aparece acentuadamente si se puede formular el problema en marcos diferentes entre los cuales se puede establecer correspondencia (por ejemplo, marco físico, marco geográfico, marco numérico, marco gráfico).

Con respecto a la construcción del concepto de área, proponen varias secuencias que implicaban:

- una fase de trabajo sobre papel cuadriculado para fijar los conocimientos anteriores sobre los cuales se apoyarían;
- una aproximación geométrica con el fin de extender a las superficies dibujadas sobre papel liso el sentido de la expresión "tener la misma área";
- actividades que apuntan a diferenciar las nociones de área y de longitud, sin tener que recurrir a la medida;
- actividades de embaldosado de superficies variadas con la ayuda de diferentes baldosas;
- un estudio de la variación o de la conservación del área al realizarse algunas transformaciones geométricas;
- la medida del área de superficies en función de una unidad de área fija y los cambios de unidad.

Cada secuencia se realizó con la misma organización:

1) Exposición del problema (el docente da la consigna y se asegura de que sea comprendida por todos los alumnos)
2) Fase de investigación (los alumnos trabajan solos o en grupos)
3) Puesta en común. Presentación de resultados (a cargo del maestro o de cada equipo, según el caso; en esta fase los alumnos saben que deben convencer a sus compañeros de la validez de su respuesta, o dejarse convencer por otros, siempre basándose en una argumentación sobre el problema)
4) Fase de síntesis y de institucionalización[3] (al comienzo de esta clase se resume el trabajo efectuado en las anteriores y las características importantes del problema son destacadas y oficializadas: se trata de hacer saber a los alumnos qué se ha extraído de lo que acaban de hacer)

[3] Se trata de oficializar los conocimientos que hasta ese momento no eran más que instrumentos y así darles un status de objeto matemático con las formulaciones convencionales, en suma, darles un status social (nota del artículo).

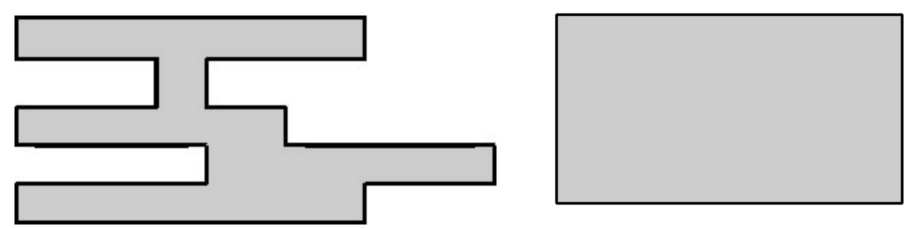
5) Nivelación de la clase y evaluación (es una fase de trabajo individual; el docente emplea "ejercicios" que, o bien se dan a los alumnos con dificultades a fin de que tengan un complemento de información y de explicaciones, o bien son ejercicios descontextualizados, destinados a que el alumno se familiarice con los nuevos conocimientos, que apuntan también a evaluar al alumno después de la fase de nivelación)

La investigación completa se extiende a una duración considerable.
En la investigación se señala que cierto número de dificultades resistentes, bien conocidas por los docentes, estarían ligadas al tratamiento por parte de los alumnos de los problemas de área. Por ejemplo, una disminución del área se comprendería como una disminución de la superficie con su forma y correría paralela a una disminución del perímetro: el área y el perímetro serían amalgamados a la superficie y se vincularían a su forma. Entonces, respecto del área, los alumnos desarrollarían una "concepción forma" vinculada al marco geométrico o una "concepción cantidad" ligada al marco numérico, o ambas, pero de forma independiente y tratarían los problemas sin establecer relaciones entre los dos puntos de vista.

Describiremos aquí solamente parte de la tercera de las secuencias, que apunta a la diferenciación de área y longitud: la comparación de los perímetros de distintas superficies de la misma área.

En la secuencia anterior los alumnos construyeron, a partir de recortar cuatro rectángulos y reacomodar las piezas, cuatro superficies de diferente forma. Se apuntaba a reconocer que tenían la misma área.

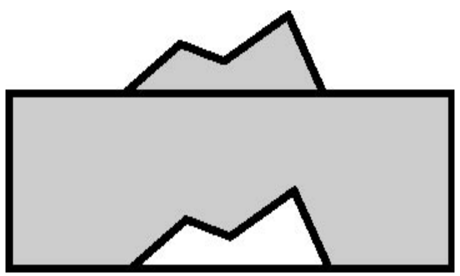
Por ejemplo:



En esta secuencia, disponen de las superficies de cartón que construyeron, regla graduada, hilo (de algún tipo que no se alargue al estirarlo) y goma de pegar.
Trabajan en los mismos equipos (de 4) que en la secuencia previa.
La consigna se dio un dos fases: la primera era pedir por escrito, a fin de conservar un registro, la cantidad de hilo necesaria para bordear exactamente la superficie realizada y verificar si la longitud era correcta pegando el hilo en el borde.

Se observa un conflicto en los procedimientos realizados: para medir efectivamente el perímetro, los alumnos pueden, o bien acumular directamente en la regla las longitudes y llevar un registro de cuantas veces se transportó la regla y de los últimos cm medidos, o bien medir los cm de cada longitud y sumarlos.
Dado que casi todos los alumnos habían fabricado superficies de bordes muy recortados, ambos procedimientos eran muy costosos.

Un alumno de una clase de 9 - 10 años, para calcular el perímetro de su figura que era muy irregular, decide medir el perímetro del rectángulo original y pide esa cantidad de hilo, a pesar de que un compañero del grupo le anticipa que eso no va a resultar, que es necesario "medir todo".
Cuando lo pega, se asombra al ver que le faltan como 20 cm. Su reacción es volver a medir con más cuidado el rectángulo original, y termina pidiendo un hilo 2 cm más largo que el primero.
Su compañero le propone como ejemplo de que su método no sirve, la siguiente figura:



cortando una pieza y pegándola al otro lado.
Recién ahí él se convence de que necesita medir todo.

En la segunda fase, una vez bordeadas todas las superficies, los alumnos de cada equipo tenían que comparar todos los perímetros. Las superficies realizadas en cada equipo tenían la misma área y por lo general, diversos perímetros. Para comparar tenían que ordenar las medidas en cm (una vez que habían hecho un pedido correcto).

En la puesta en común, se exponen las dificultades encontradas para medir cuando habían realizado una superficie muy irregular y los métodos usados para medir el perímetro. Se discutió el desfasaje entre la longitud de hilo necesaria y la pedida, distinguiendo entre errores atribuibles a cualquier proceso de medición y errores de método.
Se expusieron los distintos perímetros obtenidos en cada grupo, y se observó que cuanto más picos tenían las figuras, mayor era el perímetro.

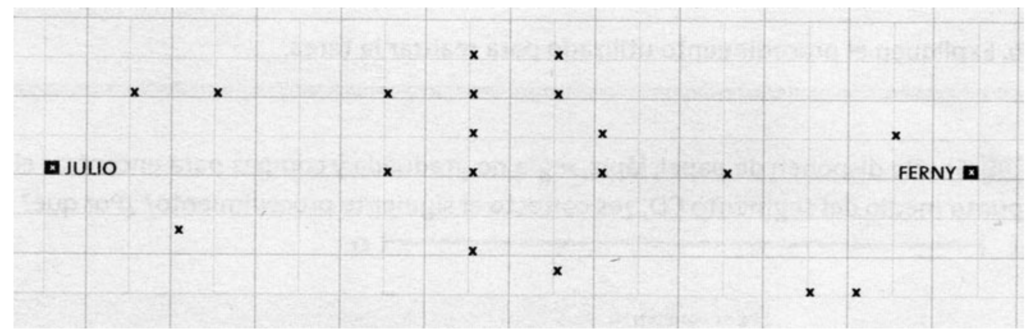
En la conclusión se destacó que:

- dos superficies de igual área no tienen necesariamente el mismo perímetro y
- para comparar las áreas de dos superficies no sirve comparar los perímetros.

Anexo 10

Lugar geométrico: introducción[1]

1. Este plano corresponde al centro de la Ciudad de Villaverde, donde viven Julio y Ferny. También se identificaron los lugares donde hay bares, ya que decidieron encontrarse a estudiar en alguno que está a igual distancia de la casa de cada uno de ellos.



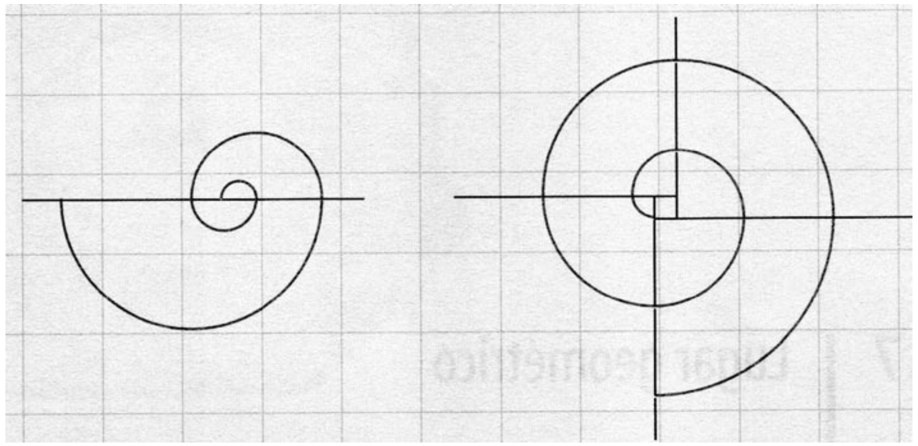
a. Indiquen con un color los bares que están más cerca de la casa de Julio. Con otro color, los que estén cerca de lo de Ferny.

b. Identifiquen los bares que cumplen con la condición exigida por los dos amigos.

c. Ubiquen otros puntos que se encuentren a igual distancia de la casa de los dos amigos.

[1] Los problemas propuestos han sido extraídos de Chemello, C., y otros, ***Matemática 7***, Buenos Aires, Longseller, 2003.

2. a. En hoja lisa, reproduzcan cada una de las siguientes espirales.



b. Expliquen el procedimiento que encontraron para hacer la tarea.

3. Utilicen el compás y una regla no graduada para construir un segmento de la misma medida que MN.

Expliquen el procedimiento utilizado para realizar la tarea.

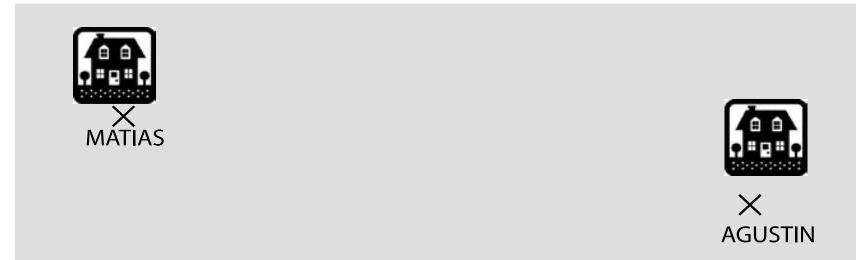
4. Si sólo disponen de papel, lápiz, regla no graduada y compás para encontrar el punto medio del segmento CD, ¿es correcto el siguiente procedimiento? ¿Por qué?

Instrucciones:

(i) Con centro en C trazar una circunferencia y hacer lo mismo con centro en D. Las dos circunferencias deben ser iguales y cortarse en dos puntos A y B.

(ii) Unir A con B. El punto donde el segmento AB corta al segmento CD, es el punto medio de CD.

5. Matías y Agustín, con sus respectivas familias, viven en un lugar no urbanizado. En el siguiente esquema, sus casas están marcadas con una cruz

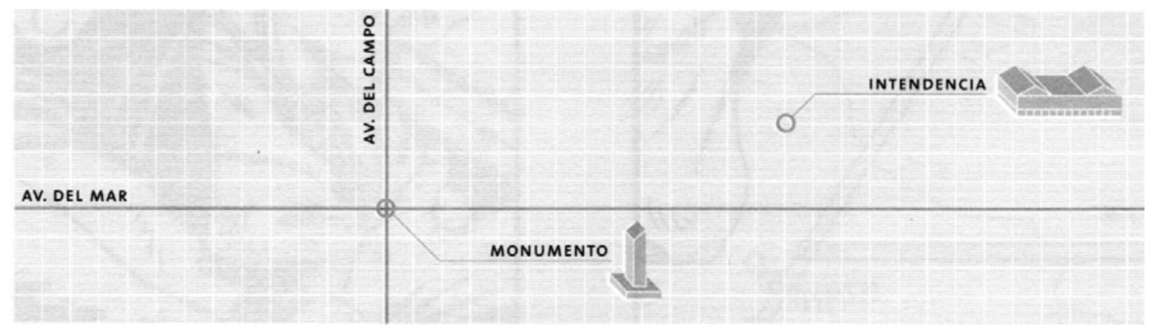


El hermano de uno de ellos, Tadeo, quiere mudarse por esa zona, y decide instalarse en algún lugar que se encuentre a la misma distancia de Matías que de Agustín.

a. Marquen en el esquema tres puntos distintos donde podría ubicarse la casa de Tadeo.

b. ¿En cuántos lugares distintos se podría ubicar? ¿Por qué?

6. Este plano reproduce el centro de la ciudad de Mirasoles.



a. Reproduzcan el plano en su carpeta, de manera que 1 cm en la hoja represente 100 m en la ciudad.

b. Indiquen los puntos que se encuentran a 200 metros de la Intendencia.

c. Señalen el lugar geométrico de los puntos que están a más de 300 metros de la Av. Del Campo.

d. ¿Qué puntos se encuentran a más de 200 m de la Intendencia y del Monumento?

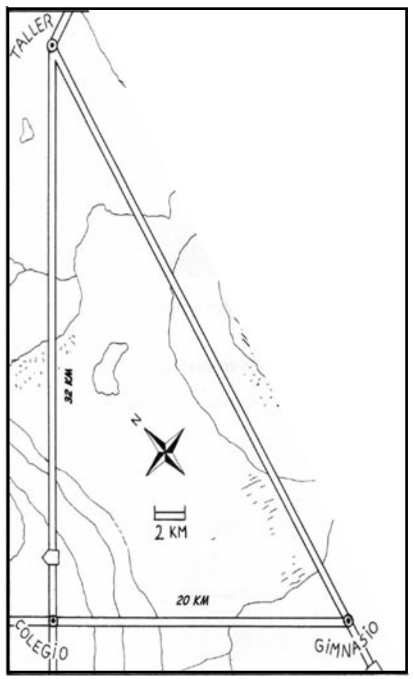
7. Joaquín tiene en su casa un perro y un pequeño puma que no se llevan nada bien. Cuando nadie queda en la casa, deja atados a ambos animales. Para el perro usa una cuerda de 3 metros que ata a un poste. El puma tiene una cadena de 5 metros que engancha en una estaca.

a. Describan las condiciones que cumplen los puntos por los que anda el perro.

b. Describan las condiciones de los puntos por los que transita el puma.

c. Si la estaca y el poste se encuentran a 2 metros una del otro, ¿comparten espacios los animales? ¿Por qué?

8. En este plano, se representan con puntos tres fincas, así como los caminos que las vinculan. Sus dueños han decidido instalar una fábrica que debe estar a más de 3 kilómetros de cualquiera de las fincas y a menos de 1 kilómetro de alguno de los caminos.



a. Sombreen todas las posibles zonas.

b. Discutan los distintos procedimientos que aplicaron para llegar a sus respuestas.

c. Dividan las posibles zonas donde ubicar la fábrica y escriban en hoja aparte, las condiciones que cumplen los puntos de esa región.

Anexo 11

¿Seleccionar y enseñar son compatibles?[1]

Los docentes de todas materias, y especialmente los de matemática, deben jugar un doble papel: enseñar y seleccionar. En lugar de “seleccionar” preferimos la palabra “orientar”. En nuestra sociedad jerarquizada no debemos ilusionarnos demasiado sobre las orientaciones positivas y sobre la influencia del profesor de matemática en este aspecto positivo que a veces existe...

Actualmente el papel esencial de los profesores de matemática (y de las otras materias), es de poner malas notas a sus alumnos contra su voluntad, para impedirles que pasen de año, o peor aún, se convenzan con el correr del tiempo que son incapaces de comprender algo de manera que van perdiendo de seguir estudiando.

Imaginemos un profesor de matemática en una clase de segundo (1º año Polimodal), en la que una tercera parte de sus alumnos no entienden nada de matemática prácticamente desde 6º (6º año EGB) –sin acusar por esto a los profesores anteriores, que como todos dieron lo mejor de sí mismos...–. Supongamos que este profesor de segundo, decida ocuparse de esos alumnos que fracasaron y modificar secuencias en su enseñanza. En su clase se escuchan diálogos semejantes a los que transcribimos en este libro.

Los “buenos” alumnos no se aburren y se dan cuenta que existen también obstáculos en los “temas” o “conceptos” que ellos creían simples. Cuando ese profesor ve la alegría de sus alumnos que dicen que finalmente entendieron algo

1 Fragmento del artículo “Selección y evaluación” del libro ***Matemática Dinámica*** de Annie Berté

y cuando ve que el entusiasmo se rompe por las malas notas que tiene que poner debido a lagunas de sus alumnos y por estar apremiado por el tiempo el docente piensa:
La tarea de selección y de enseñanza son idealmente incompatibles. Para enseñar hay que motivar a los alumnos, y la mejor manera de hacerlo, es devolviéndoles la confianza en si mismos. Poner notas, establecer una jerarquía en la clase, destruye la confianza de los que tendrían más necesidad de progresar.
Además se comprueba fácilmente que las relaciones entre alumnos y profesor son diferentes en los cursos en los cuales deben o no rendir exámenes. Si el curso no tiene que rendirlo, el profesor decide sobre la orientación de los alumnos y si deben o no repetir.

En las clases en las que deben rendir exámenes, profesores y alumnos son solidarios frente a la prueba y a pesar de la responsabilidad, es más "fácil" para el docente.

Cuando se dice que la clasificación y la enseñanza son incompatibles, aparecen argumentos contrarios:

- los alumnos necesitan notas. Las reclaman si no se las ponen; las necesitan para poder ubicarse;
- el docente puede evaluar de otra manera, poniendo notas, por ejemplo, por la participación para premiar a los alumnos que se interesan.

Analizando estos argumentos, que parecen sensatos, se llega a contradicciones. Es verdad que a pesar que un niño pueda crecer, sus padres deben decirle lo que hace bien y lo que hace mal. Para progresar, el que aprende, necesita ser evaluado en su trabajo. ¿Con notas? ¿Y por qué no? En ese caso, el profesor debe decir claramente la verdad al alumno, para que conozca sus carencias para alcanzar el nivel requerido.
¿Las notas para animar tienen sentido?
Si el docente cambia el tipo de evaluación para tomar en cuenta el interés o la imponderable creatividad, proponer un cuestionario curioso que no siempre conduce a algo, ¿el docente va a perder objetividad? ¿Necesitamos de las notas para tener en cuenta todos estos factores? ¿Cómo proceder cuando nuestras palabras de aliento no alcanzan? ¿Cómo lograr que toda evaluación se desarrolle a largo plazo? Cualquiera sea el método, si terminamos seleccionando siempre a los más dóciles, a los más conformes con el modelo, la imponderable "inteligencia" se escapa siempre. Afortunadamente, a veces los más dóciles se revelan "inteligentes" (y aun indóciles cuando envejecen), ¡aunque no siempre éste sea el caso debido a sus historias personales, por supuesto!
Y si un docente logra motivar a todos sus alumnos, lo que constituye la finalidad después de todo... En esa utópica situación a la que hay que tender, si el docente entrega a la dirección una lista en la que todos sus alumnos aprobaron, ¿lo felicitarán? Considerarán que no hizo bien su trabajo, lo que, de algún modo, resulta paradojal.

Matemática

Serie documentos para capacitación semipresencial
Educación Secundaria 1º año (7º ESB)